Tema 3. Estrategias mixtas y equilibrio en estrategias mixtas

Estrategias mixtas y equilibrio en estrategias mixtas (c.3)

1. Hasta ahora hemos visto estrategias puras, es decir, cada jugador se decide por una línea de acción, de entre las disponibles, y la sigue. Pero en muchos juegos cabe la posibilidad de *combinar las estrategias en determinadas proporciones*. Puede que el juego se repita, y podamos elegir unas veces una estrategia y otras veces otra. También puede ocurrir que el juego consista en invertir o apostar una cierta cantidad de recursos divisibles, y podamos colocar una parte en una estrategia y otra parte en otra. Otra posibilidad es que elijamos la estrategia pura a seguir según una distribución de probabilidades. Estas **estrategias mixtas** pueden conducir a un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, que se añade a los equilibrios de Nash en estrategias puras que pueda haber en el juego. La Figura 3.1, el Juego de las monedas, es un ejemplo de juego con equilibro en estrategias mixtas –se deduce sin formalismos- y sin equilibrio en estrategias puras. En la Figura 3.2, Oportunidad de mercado, hay dos equilibrios en estrategias puras y uno en estrategias mixtas.

2. El problema es *cómo determinar esas proporciones* en las que combinamos las estrategias puras. *Hay que mezclarlas en una proporción tal que la cantidad empleada de cada estrategia pura rinda el mismo beneficio al jugador.* Es lógico: si una estrategia rinde más que la otra, para maximizar el beneficio –o la utilidad- incrementaremos la cantidad de la estrategia más rentable y reduciremos la cantidad de la menos rentable. Por tanto, el valor esperado –o beneficio esperado- de seguir cada estrategia pura debe ser el mismo, y esto es cierto para cada jugador por separado. El **valor esperado de una estrategia** pura para un jugador es el resultado esperado de seguir esa estrategia. Pero cuando miramos una matriz 2x2 observamos que una estrategia tiene dos resultados posibles (por ejemplo, dos números a la izquierda de la coma en la primera fila, que son los resultados posibles de la primera estrategia para el jugador-fila). Esos dos resultados dependerán de qué estrategia (qué columna) siga el oponente, el jugador-columna. El oponente también está construyendo una estrategia mixta, así que elegirá sus estrategias puras en unas proporciones o con unas probabilidades determinadas. Esas probabilidades promedian los resultados que el jugador-fila puede esperar obtener de su primera estrategia. Veamos la siguiente matriz:

		Jugador-columna	
		Estrategia 1c	Estrategia 2c
	Estrategia 1f	F_{11}, C_{11}	F_{12}, C_{12}
Jugador-fila	Estrategia 2f	F_{21}, C_{21}	F_{22}, C_{22}

El *valor esperado* de la primera estrategia pura del jugador-fila es $VE_{1f} = F_{11}p(1c) + F_{12}p(2c)$, es decir, los resultados que se derivan de la estrategia 1f (primera fila) van a depender de lo que haga el jugador-columna, y éste elegirá una columna u otra según unas probabilidades o proporciones, p(1c) y p(2c). Lo mismo ocurrirá con la otra estrategia del jugador-fila: $VE_{2f} = F_{21}p(1c) + F_{22}p(2c)$. Necesariamente $p(1c) + p(2c) = 1$, ya que cada probabilidad o proporción tiene un valor entre 0 y 1 (multiplicadas por 100 nos dan un porcentaje). Dado que *las dos estrategias tienen que rendir igual al jugador-fila*, tiene que ocurrir que $VE_{1f} = VE_{2f}$. Tenemos por tanto un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, siendo estas p(1c) y p(2c), que podemos obtener, y con ello ya conocemos la estrategia mixta del jugador-columna:

$$F_{11}p(1c) + F_{12}p(2c) = F_{21}p(1c) + F_{22}p(2c)$$

$$p(1c) + p(2c) = 1$$

Exactamente lo mismo hacemos con el jugador-columna y los valores esperados de sus estrategias puras. Una vez más tiene que cumplirse que $VE_{1c} = VE_{2c}$ y que $p(1f) + p(2f) = 1$. Por tanto:

$$C_{11}p(1f) + C_{21}p(2f) = F_{12}p(1f) + F_{22}p(2f)$$

$$p(1f) + p(2f) = 1$$

Y de ese sistema obtenemos $p(1f)$ y $p(2f)$, y con ello ya conocemos la estrategia mixta del jugador-fila. Las estrategias mixtas igualan para cada jugador el valor esperado de cada estrategia empleada, y de esa forma se aseguran un resultado haga lo que haga el oponente.

Es un procedimiento lógico y fácil de recordar, cuando uno lo entiende bien. Hay otra forma de enfocarlo, perfectamente análoga. Superpongamos a la matriz de resultados anterior esta otra *matriz de probabilidades*. Dentro de cada casilla hay un producto de probabilidades[1]. Ese producto es la probabilidad de que, jugando cada jugador su estrategia mixta, caigamos en esa casilla. Pues bien, ahora sólo hay que multiplicar los resultados o pagos de cada jugador en cada casilla –matriz anterior- por esas probabilidades –las probabilidades de que obtengamos precisamente esos resultados-, y sumemos todo para cada jugador en una **función de pagos**.

[1] Dado que $p = p(1f)$, $q = p(1c)$, $(1-p) = p(2f)$ y $(1-q)=p(2c)$, es obvio que se cumple que $p(1c) + p(2c) = 1$ y que $p(1f) + p(2f) = 1$.

			Jugador-columna
		Estrategia 1c	Estrategia 2c
	Estrategia 1f	p q	p (1-q)
Jugador-fila	Estrategia 2f	(1-p) q	(1-p) (1-q)

La *función de pagos* del jugador-fila será:

$$FP_f = F_{11}pq + F_{12}p(1-q) + F_{21}(1-p)q + F_{22}(1-p)(1-q)$$

La *función de pagos* del jugador-columna será:

$$FP_c = C_{11}pq + C_{12}p(1-q) + C_{21}(1-p)q + C_{22}(1-p)(1-q)$$

En definitiva *cada jugador quiere maximizar sus beneficios*, por lo que el procedimiento matemático consiste en tomar cada función de pagos, derivar e igualar a cero, para así hallar su máximo. El jugador-fila decide la probabilidad o proporción p, y no controla para nada q, cuyo valor decide el jugador-columna. Por tanto, derivamos FP_f con respecto a p, y consideramos q una constante; y derivamos FP_c con respecto a q y consideramos a p una constante. Después de igualar a cero esas derivadas podemos obtener un valor para p y q (y por tanto también para 1-p y 1-q). El resultado es el mismo que mediante el otro procedimiento. Obviamente, podemos obtener la función de pagos desde las funciones de valores esperados, y viceversa:

$$FP_f = VE_{1f}\, p(1f) + VE_{2f}\, p(2f)$$

$$FP_c = VE_{1c}\, p(1c) + VE_{2c}\, p(2c)$$

3. En los juegos que hemos visto hasta ahora los jugadores eran racionales y tenían información completa. Por tanto, pueden predecir a veces el comportamiento del oponente (por ejemplo, cuando éste tiene una estrategia dominante). Con las estrategias mixtas se combinan las estrategias en una determinada proporción, que es lo mismo que decir con una determinada distribución de probabilidades. Con ello los jugadores pueden hacer su comportamiento impredecible. Por ejemplo, la mentira (el farol en los juegos de cartas) sólo es efectiva cuando es impredecible. Las estrategias mixtas nos ayudan a determinar la cantidad de mentira aleatoria óptima en un juego de cartas. Es el tema del juego del Póquer del mentiroso, Figura 3.3, epígrafe 3.3.

4. El libro utiliza el primero –la igualación de los valores esperados- para calcular el equilibrio en estrategias mixtas del juego de suma variable Oportunidad de mercado, Figura 3.2. Es un juego simétrico -los jugadores obtienen los mismos resultados cuando usan las mismas estrategias-, pero con equilibrios en estrategias puras asimétricos en ganancias. El equilibrio en estrategias mixtas es simétrico, pues p_1(entrar)=p_2(entrar) = 2/3 y p_1(no entrar)=p_2(no entrar) = 1/3. Las ganancias son las mismas para ambos jugadores –podríamos calcularlas en las funciones de pago o en los valores esperados de cada estrategia pura-, e iguales a cero. Por tanto, el equilibrio en estrategias mixtas de este juego es ***ineficiente***, pues ofrece a cada jugador un resultado peor que cualquiera de los equilibrios en estrategias puras. Si bien las estrategias mixtas ofrecen la posibilidad de compartir la oportunidad de mercado, esta opción no es rentable. Los equilibrios de Nash que son ineficientes *no* son solución del juego. Es lo que se llama principio de **dominancia en ganancias**. Gardner discute la posibilidad de usar una condición de **simetría en las ganancias (justicia)** en vez de la eficiencia para definir qué es y qué no es solución de un juego. Es un tema objeto de discusión. Las dos a la vez no se pueden imponer porque habría juegos sin solución, como este de Oportunidad de mercado. Habría que considerar cada caso por separado, pero en general se acepta que la eficiencia *siempre* es un criterio para seleccionar soluciones de un juego. No obstante, en Oportunidad de mercado, si no se puede impedir que dos empresas entren, y si estas no aceptan una solución asimétrica, la simetría impondría su solución a la eficiencia. En el juego de Coordinación de sistemas de video, Figura 2.10, epígrafe 3.4, no hay problemas de injusticia (asimetría en ganancias), pero el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es ineficiente (está dominado en ganancias por los equilibrios en estrategias puras) y eso basta para descartarlo como solución.

5. No tiene por qué ocurrir siempre, como hasta ahora, que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, eficiente o no, sea simétrico *en las proporciones*, es decir, que p = q. Cuando el juego es asimétrico –los jugadores no obtienen las mismas ganancias cuando siguen las mismas estrategias, sino que para un jugador los beneficios son más altos que para el otro cuando se invierten sus papeles- ocurrirá que $p \neq q$. Esto hace los cálculos más complicados en el sentido de que hay que repetirlos para uno y otro jugador. Es el caso de Oportunidad de mercado asimétrico, Figura 3.4. Aquí no hay problema de asimetría *en ganancias* en el equilibrio en estrategias mixtas, puesto que ambos jugadores ganarían cero en él. Pero aunque así hubiera sido, *la simetría en ganancias como criterio de justicia ya no tiene sentido en un juego asimétrico*, en el que hay diferencias entre los jugadores

6. Pero en el juego de Precios bajos cada día, Figura 3.5, del epígrafe 3.6, tenemos el ejemplo contrario: criterio de simetría en ganancias (justicia) es el más importante, por encima del criterio de eficiencia. Se debe a que el juego es simétrico, y lo es porque ambas empresas son iguales: tienen las mismas estructuras de costes y las mismas funciones de demanda. Las dos empresas ganan con el equilibrio en estrategias mixtas *lo mismo* ($7.500 cada una), lo cual es importante dada la simetría del juego. Con un equilibrio de Nash en estrategias puras los beneficios globales serían mayores (una de las dos empresas obtendría $8.500 en vez de $7.500), pero esa solución se descarta porque ninguna empresa aceptaría ganar menos que la otra, y respondería con rebajas de precios que conducirían al peor resultado de todos. Las estrategias mixtas ofrecen una solución al juego, que no es la más eficiente pero es justa, y por tanto aceptada por ambos jugadores y estable.

7. Aunque el libro no lo trata expresamente, no está de más saber que no siempre existe un equilibrio en estrategias mixtas, y también que pueden existir muchos (de hecho, infinitos). Estos casos surgen cuando existen estrategias *estrictamente* dominantes que conducen a un equilibrio de Nash en estrategias puras. En general, eso determina la solución, y no existirá un equilibrio en estrategias mixtas. Si al menos una de las estrategias es *débilmente* dominante habrá una solución que será un equilibrio de Nash en estrategias puras, pero además *podría* haber infinitos equilibrios alternativos en estrategias mixtas con una eficiencia igual, y que son también posibles soluciones. Fijémonos en la siguiente matriz.

			Jugador-columna
		Estrategia 1c	Estrategia 2c
	Estrategia 1f	F_{11}, C_{11}	F_{12}, C_{12}
Jugador-fila	Estrategia 2f	F_{21}, C_{21}	F_{22}, C_{22}

Si $F_{11} > F_{21}$ y $F_{12} > F_{22}$, el jugador fila tendrá una estrategia dominante, que es 1f. Si $C_{11} > C_{12}$ y $C_{21} > C_{22}$, el jugador columna tendrá una estrategia dominante que es 1c. En este caso, (F_{11}, C_{11}) es un equilibrio de Nash y la solución del juego, y no existirá ninguna estrategia mixta que conduzca a un equilibrio distinto. Cuando $F_{11} > F_{21}$ y $F_{12} > F_{22}$, pero $C_{11} = C_{12}$ y $C_{21} > C_{22}$, la solución en estrategias puras será la misma, pero al jugador columna le será indiferente jugar una estrategia pura (1c) o cualquier combinación lineal de las estrategias 1c y 2c, pues sabiendo que el jugador 1 escogerá 1f y que $C_{11} = C_{12}$ cualquiera de las posibilidades descritas ofrecerá idénticas ganancias. *En este caso* hay infinitas posibles estrategias mixtas para el jugador 2 que conducen a equilibrios tan eficientes como el de la solución con solo estrategias puras.

Hasta ahora hemos visto **estrategias deterministas**:

- **Establecen por adelantado todo lo que un jugador debe hacer**.
- Cualquier estrategia completamente determinista **es una estrategia pura**.
- **Un equilibrio** en el que todos los jugadores utilizan una estrategia pura es un Equilibrio **en estrategias puras**.
- Hasta ahora, todos los juegos tenían **soluciones** que eran **equilibrios en estrategias puras.**

Cualquier estrategia que **no** sea **completamente determinista, que involucre el azar será <u>estrategia mixta</u>.**

Un **equilibrio en el cual <u>al menos un jugador sigue una estrategia mixta</u> será equilibrio en estrategias mixtas.**

La forma correcta de jugar al **juego de las monedas** es **utilizando una estrategia mixta**.

En un **juego sobre la oportunidad de entrar en un nuevo mercado donde sólo hay sitio para una empresa→contradicción entre eficiencia y justicia del equilibrio para utilizar estrategias mixtas.**

Los faroles aparecen de forma natural **en el póker del mentiroso.**

Los juegos de coordinación <u>siempre</u> tienen **equilibrios en estrategias mixtas.**

Las empresas que juegan a Oportunidades de mercado son asimétricas.

Las políticas comerciales incluyen estrategias mixtas.

3.1.- <u>Estrategias mixtas</u>

Estrategia pura:

- **Completamente determinista→No** involucra **azar**
- **jugador completamente predecible**

Estrategia mixta:

- No completamente determinista→Incluye el **azar, la probabilidad**
- **El jugador no quiere ser predecible**.
- Es una **distribución de probabilidad sobre estrategias puras.**
- **Un equilibrio en el que al menos un jugador tiene estrategia mixta**
- **Se utiliza cuando no se quiere ser predecible**

Algunas estrategias puras no pueden ser utilizadas en absoluto, pero **al menos dos estrategias puras son utilizadas con probabilidad positiva.**

Un jugador que utiliza una **estrategia mixta se ha reemplazado** a sí mismo **por un mecanismo aleatorio** y ha fijado las probabilidades que gobiernan este mecanismo en un intento de **maximizar su utilidad esperada**.

Juego de las monedas

- **El más simple** con **estrategias mixtas**
- **Hay dos jugadores**
- Es de **suma cero→uno gana y el otro pierde**
- **Cada jugador** tiene **dos estrategias puras: Cara (C)** y **Cruz (+)**
- Cada uno **se juega una cantidad fija**, 1 centavo
- Si ambos juegan lo mismo**, forman pareja:**

> **(C, C) o (+, +), hay pareja, ambos elijen lo mismo → j1 gana** la apuesta de j2;
> **(C, +) o (+, C)**, no hay pareja**→ j2 gana** la apuesta de j1.

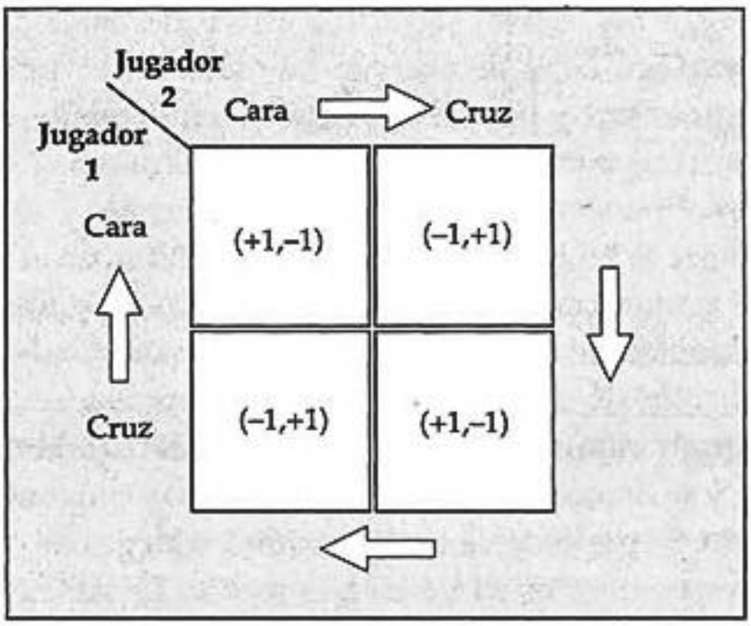


Figura 3.1. Juego de las monedas. Todas las ganancias están en centavos.

El valor esperado del jugador 1 por jugar cara es

$$VE1(C)= p2(c)(+1) + p2(+)(-1)$$

si el jugador 1 utiliza la estrategia pura cruz (+). como el jugador 2 está utilizando una mixta, el j1 se enfrenta a un valor esperado por jugar cruz

$$VE1(+)=p2(c)(-1) + p2(+)(+1)$$

ahora nos dice que igualamos las estrategias

$$VE1(C) = VE1(+)$$

Entiendo que esto sería:

$$p2(c)(+1) + p2(+)(-1) = p2(c)(-1) + p2(+)(+1)$$

Pero luego nos dice que añadimos el requisito de que la estrategia mixta del j2 sea una distribución de probabilidad cuyas sumas =1

$$p2(c) + p2(+) = 1$$

Entonces nos dice que tenemos dos ecuaciones y que al resolverlas

$$p2(c)=p2(+)=0,5$$

¿de dónde sale ese 0,5?

Entiendo que en la segunda ecuación puedo sustituir por ejemplo p2(+) = 1 - p1(c)

Si eso lo sustituyo en la primera ecuación:

p2(c)(+1) + p2(+)(-1) = p2(c)(-1) + p2(+)(+1) sería

p2(c)(+1) + 1 – p2(c)(-1) = p2(c)(-1) + 1 – p2(c)(+1)

p2(c) + p2(+) =1

Por lo tanto p2(+) = 1 - p2(c)

Ahora ya despejando p2(c) = p2(+) sería

p2(c) = 1 - p2(c) por lo que p2(c) = 0,5.

- **No** hay e**quilibrio en estrategias puras**: **ninguna** de las combinaciones de estrategias puras **es un punto estable**:

  En (C, C) el j2 tiene incentivos para jugar (+) convirtiendo con ello una pérdida de un centavo en una ganancia de un centavo; lo mismo con las cuatro combinaciones. En esta situación uno de los dos quiere cambiar de estrategia→inestable.

- El Juego de las monedas **no puede ser resuelto utilizando estrategias puras**.

- Tiene **una solución**, que no puede verse a partir del diagrama de flechas → **estrategias mixtas** → el acto de **lanzar la moneda al aire es un mecanismo aleatorio** para escoger entre Cara o Cruz **con probabilidad de 0,5**, lo cual tiene sentido para la teoría de juegos.

Al ser un juego de **suma cero**, recordemos, **los equilibrios son condición necesaria.**

Los **equilibrios de Nash son soluciones** de esos juegos siempre.

Ser equilibrio de Nash es condición necesaria para ser solución en juegos de suma cero, lo que quiere decir que **toda solución, necesariamente, es un equilibrio de Nash.**

Ser equilibrio de Nash es condición suficiente para ser solución en juegos de suma cero, lo que quiere decir que **todo equilibrio de Nash es una solución de ese juego**, sin más requisitos.

Oportunidad de mercado

- La importancia de **estrategias mixtas no** es tan **evidente**
- Hay **dos empresas** y **una única oportunidad en el mercado**→***beneficio 100***
- Si **ambas aprovechan** la oportunidad de mercado→*cada una pierde 50*
- Si **una permanece fuera** del mercado → ***ni gana ni pierde***
- Las empresas **deciden simultáneamente si entrar o no**

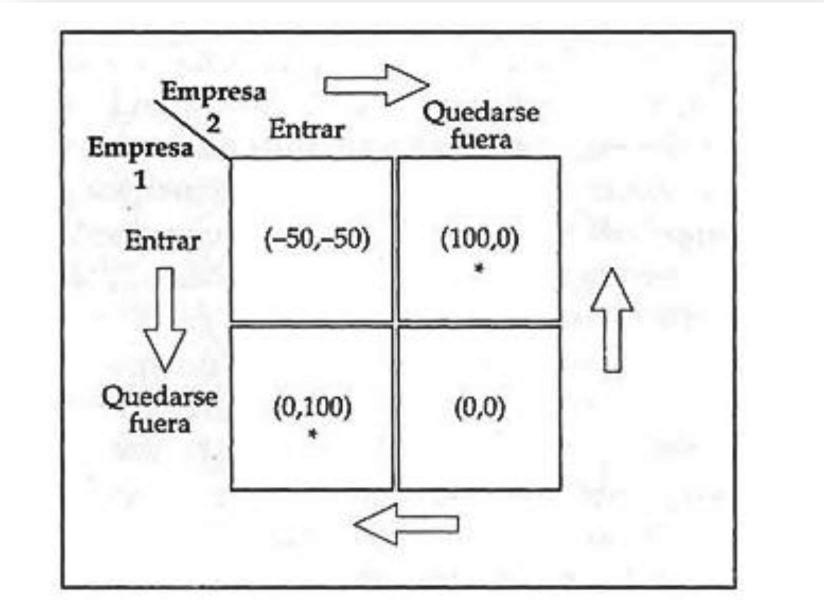


Figura 3.2. Oportunidad de mercado.

A partir del diagrama de flechas:

- Hay **dos equilibrios en estrategias puras**.

- **En ambos, una empresa aprovecha la oportunidad** de mercado.

- **La** empresa **que entra** en el mercado **disfruta de mayor ganancia** que la que se queda fuera.

- Este juego **es simétrico**: ambas empresas **obtienen la misma ganancia cuando utilizan las mismas estrategias** →Cuando se intercambian las estrategias, se intercambian las ganancias.
- **Los dos equilibrios en estrategias puras**, donde los jugadores utilizan estrategias diferentes y obtienen ganancias diferentes, **son asimétricos**: las empresas obtienen **ganancias muy diferentes**.

- También tiene **un equilibrio simétrico, en estrategias mixtas** y en él **cada jugador recibe las mismas ganancias. →no puede verse en el diagrama de flechas.**

- **(0, 0) no es equilibrio** porque **no es un punto estable** y **cualquier jugador tiene un incentivo para romper la estrategia.**

- **Cualquier estrategia pura que se utilice para una estrategia mixta siempre va a tener el mismo valor esperado.**

- **Si una estrategia recibe una ganancia menor que otra, se deberá utilizar la que recibe mayor ganancia y excluir la otra→ Los jugadores siempre buscarán maximizar su utilidad.**

En el juego del nicho de mercado tenemos dos equilibrios de Nash en estrategias puras. Pero podemos calcular un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Digamos que el juego se repite o que las empresas apuestan recursos a cada estrategia y las dejamos decidir cuántas veces o qué proporción de su apuesta va a una o a otra estrategia. Lo importante es ver si con ese nuevo equilibrio de Nash, en estrategias mixtas, ganamos algo.

El equilibrio en estrategias mixtas se encuentra calculando probabilidades o proporciones para cada jugador, que le dicen cuántas veces tiene que jugar/apostar por una estrategia y cuántas por la otra. Eso se hace igualando (para cada jugador) los valores esperados de usar una estrategia y de usar la otra. En este juego en concreto una de las dos estrategias (la 2) tiene un valor esperado cero siempre, haga lo que haga el otro jugador. Como calculamos las probabilidades igualando los dos valores esperados, los dos tendrán valor cero. Por tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas implica unas probabilidades que conducen a unas ganancias (esperadas) para ambas empresas de (0,0). Es **ineficiente**. Lo es porque en el equilibrio de Nash en estrategias puras una empresa se quedaba con una ganancia cero, pero la otra obtenía una positiva.

Moraleja: en este caso concreto las estrategias mixtas, que consisten en repartirse las dos empresas de alguna forma la oportunidad de mercado, no es un resultado mejor, sino peor. Solo hay sitio para una empresa, y no para dos repartiéndose la oportunidad. Es injusto, sí, porque lo bonito sería compartir, pero compartir es **ineficiente**. Es un ejemplo de **conflicto entre equidad y eficiencia**. Otro ejemplo es la paradoja liberal de Sen que explico en el video de presentación. Hay muchos más casos así en el mundo real. Las estrategias mixtas nos ayudan a entender por qué se da ese conflicto en este caso, y por qué la opción de compartir es la peor de todas.

3.2.- Cálculo de equilibrios en estrategias mixtas en juegos 2*2

Juego de las monedas:

- **No** tiene **equilibrio en estrategias puras**, por lo que lo buscamos en mixtas.
- Introducimos el concepto probabilidad.

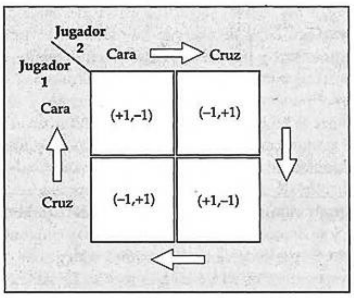


Figura 3.1. Juego de las monedas. Todas las ganancias están en centavos.

La clave en un equilibrio en estrategias mixtas es: **Cada estrategia pura que se utiliza como parte de una estrategia mixta tiene el mismo Valor Esperado** →Si una estrategia recibe una ganancia menor que otra, entonces **debería utilizarse la estrategia que recibe una ganancia mayor** y **excluir la estrategia** que recibe una **ganancia menor**.

Las únicas estrategias que **no** son **excluidas reciben la misma ganancia**. (Aplicaremos este principio repetidamente para hallar el equilibrio en estrategias mixtas).

Sean:

- **p1(C)** y **p1(+)** la **probabilidad de que j1 elija cara o cruz**, respectivamente
- **p2(C)** y **p2(+)** la **probabilidad de que j2 elija cara o cruz**, respectivamente

Consideremos ahora **las ganancias del j1**:

Si:

- **J1** utiliza **estrategia pura Cara, p1(C),** y
- **J2 estrategia mixta p2 = [p2(C), p2(+)].**

entonces, **el J1 se enfrenta a un Valor Esperado**, por jugar Cara:

VE1(C) = p2(C)(+1) + p2(+)(-1)

Cuando j2 escoge cara, el resultado es una pareja y j1 gana (+1)→los dos eligen lo mismo.

Cuando j2 escoge cruz, el resultado no es pareja y j1 pierde (-1)→eligen distinto

Si:

- **J1** utiliza otra estrategia pura de cruz, **p1(+),** y
- J2 sigue con la mixta **p2 = [p2(C), p2(+)].**

entonces, **J1 se enfrenta a un Valor Esperado**, por jugar Cruz:

$$\mathbf{VE1\ (+) = p2(C)(-1) + p2(+)(+1)}$$

Cuando j2 escoge cara, el resultado no es pareja y j1 pierde (-1)
Cuando j2 escoge cruz, el resultado es pareja y j1 gana (+1)

- **Igualando las ganancias de las dos estrategias del J1** ("Cada estrategia pura que se utiliza como parte de una estrategia mixta tiene el mismo valor esperado").

$$VE1(C) = VE1(+)$$

$$\mathbf{p2(C)(+1) + p2(+)(-1)= p2(C)(-1) + p2(+)(+1)}$$

- A esta condición **añadimos el requisito** de que **la estrategia mixta del J2 sea una distribución de probabilidad, que sumen 1.**

$$p1(C) + p2(+) = 1 \rightarrow p2(+) = 1- p1(C)$$

- Tendremos **dos ecuaciones con dos incógnitas**, al resolverlas obtenemos:

$$\mathbf{p2^*(C) = p2^*(+) = 0{,}5}$$

donde * son los valores de la estrategia mixta de equilibrio para el jugador 2

El valor de las estrategias puras de un jugador depende de la estrategia mixta del otro jugador.

La condición de que **las estrategias puras han de proporcionar la misma ganancia** <u>afecta a la estrategia mixta de su oponente</u>, y viceversa.

El oponente hace que el jugador sea indiferente entre sus estrategias puras y el jugador hace también lo mismo con el oponente.

Ahora **podemos calcular el Valor esperado,VE del J1**, de cada una de las estrategias puras en su estrategia mixta:

$$VE1(C) = VE1(+)$$

$$\mathbf{VE1(C) = 0.5(C)(+1) + 0.5(+)(-1) = VE1\ (+) = 0}$$

El J1 ni gana ni pierde al utilizar cualquiera de sus estrategias puras siempre que las utilice en una estrategia mixta.

Ahora **sabemos qué probabilidades debe usar j2 en su estrategia mixta para hacer que j1 juegue de forma honesta.** *Si j2 escoge más veces cara que cruz, el j1 puede garantizarse mayor porcentaje de victorias si escoge siempre cara.*

Podemos seguir el **mismo procedimiento con j2→** j1 juega cara con probabilidad p1(C)*=0,5=P1(+)*; lo que proporciona a j2 un valor esperado por utilizar cualquiera de sus estrategias puras, de :

$$\begin{aligned} VE_2(C) &= p_1^*(C)(-1) + p_1^*(+)(+1) \\ &= (0,5)(-1) + (0,5)(+1) \\ &= 0 \\ &= VE_2(+) \end{aligned}$$

El Juego de las monedas <u>no es un juego simétrico, pero tiene un equilibrio simétrico</u> que en estrategias mixtas explica por qué la gente lanza la moneda al aire cuando juega a juego de monedas→ se intenta que salgan 50% (c) y 50% (+)→**En este equilibrio simétrico, cada jugador juega cara con P = 0.5 (C) y P = 0.5 (+).**

Este **equilibrio en estrategias mixtas** tiene **una única solución** y es el **único equilibrio**.
La única forma en que la gente puede jugar al juego de las monedas es suplantándose por un mecanismo aleatorio.

<u>Oportunidad del mercado</u>

- Tiene **<u>dos equilibrios en estrategia puras</u>: (entrar, quedarse fuera) y (quedarse fuera, entrar)→** la **empresa que aprovecha la oportunidad y entra** en el mercado obtiene una **ganancia mucho mayor** que la que se queda fuera.

- <u>También tiene **un equilibrio en mixtas**</u> que **es simétrico**: **ambas empresas adoptan la misma estrategia y obtienen las mismas ganancias:**

Sea p1 (entrar) la probabilidad de que e1 entre en el mercado y p1(quedarse fuera) la probabilidad de que e1 se quede fuera.

Sea p2 (entrar) la probabilidad de que e2 entre en el mercado y p2(quedarse fuera) la probabilidad de que e2 se quede fuera.

- ***Calculamos la ganancia de e1**: supongamos que <u>e1 escoge la estrategia pura Entrar</u> y que la <u>e2 utiliza una estrategia mixta: p2=[p2(entrar), p2(quedarse fuera)]</u>→como e2 está utilizando una estrategia mixta, la e1 se enfrenta a un valor esperado por entrar en el mercado de:*

VE1(entrar)= p2 (entrar)(-50)+p2(quedarse fuera)(100)

Cuando e2 también entra en el mercado, ambas pierden 50
Cuando e2 queda fuera, e1 se queda con la ganancia de 100.

- *Supongamos ahora que <u>**e1** decide quedar con la estrategia pura **Quedarse Fuera**</u>→ Haga lo que haga la e2, la e1 obtiene 0.*

- *Ahora **igualaremos las ganancias de las dos estrategias de e1** ("<u>Cada estrategia pura que se utiliza como parte de una estrategia mixta tiene el mismo valor esperado</u>").*

$$VE_1(\text{entrar}) = VE_1(\text{quedarse fuera}) = 0$$

sustituyendo:

$$p_2(\text{entrar})(-50) + p_2(\text{quedarse fuera})(100) = 0$$

y si añadimos el requisito de que la estrategia mixta de e2 sea una distribución de probabilidad cuyas suman 1:

$$p_2(\text{entrar}) + p_2(\text{quedarse fuera}) = 1$$

-50(1-p2(+))+100p2(+)=0
-50+50p2(+)+100p2(+)=0
150p2(+)=50
p2(+)=50/150
p2(+)=1/3

1-p2(+)=p2(C)
3/3-1/3=2/3→p2(C)=2/3

Obtenemos dos ecuaciones y dos incógnitas,p2(entrar) y p2 (quedarse fuera)→se obtiene una probabilidad de 2/3 de que la empresa 2 entre en el mercado y una probabilidad de 1/3 de que se quede fuera:

$$p_2^*(\text{entrar}) = \frac{2}{3}$$

$$p_2^*(\text{quedarse fuera}) = \frac{1}{3}$$

ambos son los valores *de la estrategia mixta de equilibrio de la e2.*

- *Ahora podemos calcular* ***el VE para e1 en cada una de sus estrategias puras****:*

VE1(entrar)= p2 (entrar)(-50)+p2(quedarse fuera)(100)

$$VE_1(\text{entrar}) = \left(\frac{2}{3}\right)(-50) + \left(\frac{1}{3}\right)(100) = 0 = VE_1(\text{quedarse fuera})$$

La empresa 1 ni gana ni pierde cuando la e2 utiliza la estrategia mixta de equilibrio, que asigna una probabilidad de 2/3 a entrar en el mercado.

- *Para e1 se obtienen las mismas probabilidades:*

$$p_1^*(\text{entrar}) = \frac{2}{3};$$

$$p_1^*(\text{quedarse fuera}) = \frac{1}{3}$$

con un valor esperado de 0 para cada una de las estrategias puras.

El equilibrio en estrategias mixtas se encuentra calculando probabilidades o proporciones para cada jugador→le dicen cuantas veces tiene que jugar/apostar por una estrategia y cuantas por otra→se consigue igualando el VE de usar cada una de las estrategias.

Las ganancias en este equilibrio en estrategias mixtas, (0,0) ***son ineficientes*****→ Una empresa podría ganar mucho dinero entrando en el mercado si tuviera la seguridad de que la otra empresa no iba a entrar.** Esta seguridad es **precisamente lo que falta** y además **ambas tienen igual derecho a entrar.**

La única manera de que las ambas puedan entrar en el mercado **es jugar el ineficiente pero simétrico, equilibrio de estrategias mixtas.**

Oportunidad de mercado *puede entenderse como una alegoría*; en la mayoría de los mercado industriales **hay sitio para pocas empresas**: **Oligopolio natural**, donde **el azar juega un papel importante en identificar las empresas que entrarán en estos mercados→si entran demasiadas, se producirán pérdidas generalizadas y en l/p algunas empresas deberán abandonar el mercado.**

Si conocemos **equilibrio en estrategias mixtas**, podemos entonces **predecir** realmente con qué f**recuencia** habrá demasiadas empresas que **entren en el mercado**

Como la probabilidad de entrar es de 2/3, la probabilidad de que entren dos empresas es de $(2/3)^2 = 4/9$. *Algo más de 50% de las veces, dos empresas entrarán en el mercado cuando sólo hay sitio para* *una. A largo plazo, un de estas empresas debe salir del mercado. Éste es el proceso que se observa constantemente.*

Es **difícil evitar que las empresas adopten la misma estrategia en Oportunidad de mercado→ chocan dos principios** importantes: **eficiencia** y **justicia**.

- La **eficiencia** implica que <u>se juegue un equilibrio con las mayores ganancias posibles</u> (100 en este caso).
- La **justicia** requiere que <u>se juegue un equilibrio en el que cada jugador gane lo mismo</u> (en este caso 0)→reparto equitativo.

<u>**Los dos principios no pueden satisfacerse a la vez** en un juego como Oportunidad de mercado</u>.

El **conflicto entre eficiencia e igualdad de derechos** aparece **frecuentemente en economía** y en el ámbito empresarial.

El nombre técnico **para** <u>**eficiencia**</u> en la teoría de juegos es: **Dominancia en ganancias**: **Si todos** los jugadores **reciben una ganancia mayor en un equilibrio** del juego **que en otro** equilibrio, entonces **este último no es la solución.**

Dominancia en ganancias es un buen candidato para ser una condición suficiente. Sin embargo, **ninguna solución puede satisfacer a la vez la dominancia en ganancias y la simetría.**

El juego **de Oportunidad de mercado** proporciona un claro **contraejemplo: su único equilibrio simétrico está nominando en ganancias por cualquiera de sus otros dos equilibrios asimétricos.** No podemos pedir más en la resolución de un juego. No obstante, la **eficiencia es deseable**, por lo que **intentaremos** siempre que sea posible **incluir en la solución toda la eficiencia que podamos.**

El equilibrio en estrategias mixtas se encuentra calculando probabilidades o proporciones para cada jugador, que le dicen cuántas veces tiene que jugar/apostar por una estrategia y cuántas por la otra. Eso se hace igualando (para cada jugador) los valores esperados de usar una estrategia y de usar la otra. En este juego en concreto una de las dos estrategias (la 2) tiene un valor esperado cero siempre, haga lo que haga el otro jugador. Como calculamos las probabilidades igualando los dos valores esperados, los dos tendrán valor cero. Por tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas implica unas probabilidades que conducen a unas ganancias (esperadas) para ambas empresas de (0,0). Es **ineficiente**. Lo es porque en el equilibrio de Nash en estrategias puras una empresa se quedaba con una ganancia cero, pero la otra obtenía una positiva.

3.3.- Estrategias mixtas y faroles: el Póquer del mentiroso

Al utilizar una estrategia mixta **se intenta ser impredecible**.

Un farol es un **intento de confundir o engañar**, ya que en un juego con **información imperfecta,** se tiene **información valiosa para el oponente** y **perjudicial para el propio jugador si la revela→** el jugador tiene un poderoso **incentivo para mantener esta información en secreto.**

Pero un **comportamiento estratégico** puede **desvelar esta información**; por ello ocurren **los faroles.**

Farol: **intento de confundir o engañar** para evitar que el oponente pueda inferir lo que el jugador sabe; pero **un exceso** de ellos **es contraproducente**.

Las **estrategias mixtas** son el **vehículo para los faroles→** un **equilibrio en estrategias mixtas indica** simplemente **cuántos faroles necesita un jugador para proteger el valor de su información.**

El Póquer del mentiroso tiene **un único equilibrio**, que es **en estrategias mixtas**; y su solución **incluye algunas mentiras**.

- Hay **dos jugadores**, j1 y j2
- Hay dos cartas, **as y rey**, donde **as es mejor que rey**.
- Se **entrega boca abajo una carta a j1**, que la **puede ver en privado**
- j2 solo sabe que 50% (probabilidad de 0,5) será as y 50% (probabilidad de 0,5) será rey
- **j1 dice en alto su carta; puede decir verdad o mentir** en caso de que sea rey y decir que tiene as
- **j2 oye y dice**:
    - **si no se cree** a j1 **y la carta no** es as→**j1 pierde y paga 1$** a j2
    - **si no se cree** a j1 **y si era** as→**j2 pierde y paga 1$** a j1
    - **si se cree** a j1 → **j1 le gana directamente** ½ $ a j2
    - **si j1 dice rey→ el juego termina y ambos ni ganan ni pierden**

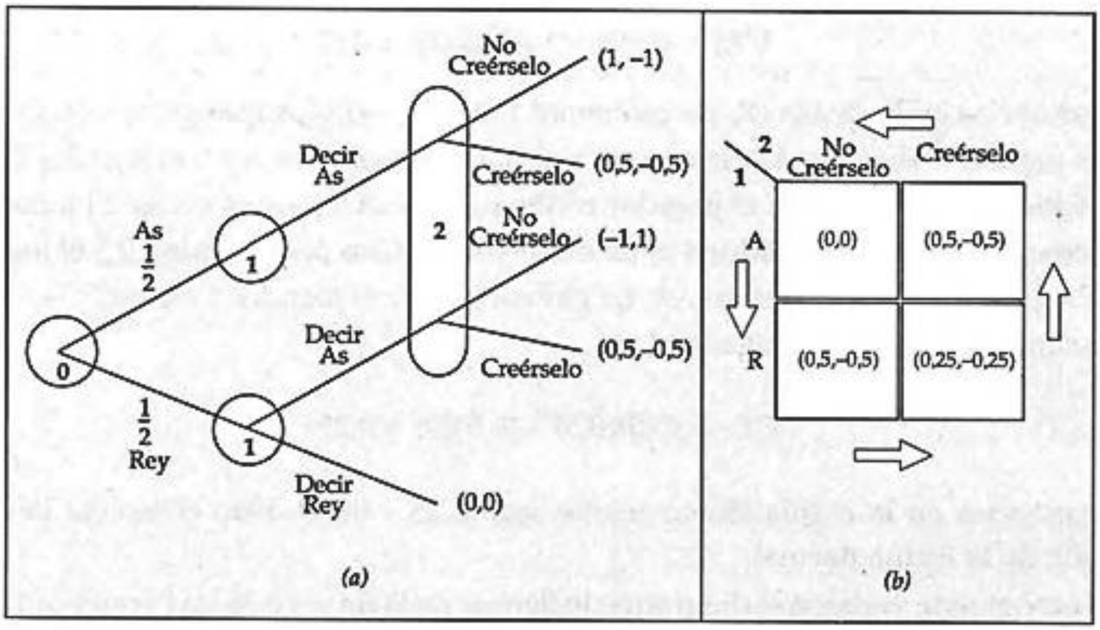


Figura 3.3. Póquer del mentiroso: ***(a)*** **forma extensiva;** ***(b)*** **forma normal.**

j1 tiene dos estrategias, dependiendo de la info que posea:

- **A: decir As cuando la carta es rey→** es **un farol** y **le puede reportar ½ $** de j2 aun teniendo mala mano, **si j2 le cree**.

- R: decir Rey cuando la carta es rey→ es una realidad y el **j1 no gana nada**.

De forma similar ocurre con j2.

Todo se ve muy claro en la forma normal, **fig 3.3.(b):**

- *Casilla (A, creerlo): j1 siempre dice tener as y j2 siempre cree*

  →j1 recibe as con probabilidad de 0,5 y dice que es as, j2 le cree y le da ½$
  →j1 recibe rey con probabilidad de 0,5 y dice que es as, j2 le cree y le da ½ $

  El valor esperado de ganancia de j1 será:

$$VE1= (0,5)(1/2) + (0,5)(1/2)=0,5$$

- *Casilla (A, no creerlo): j1 dice que es as y j2 no lo cree*

  →j1 recibe as con probabilidad de 0,5 y dice que es as, j2 no le cree y le da 1$
  →j1 recibe un rey con probabilidad de 0,5 y dice que es as, j2 no le cree y gana 1$ a j1

Entonces el valor esperado de j1 es:

$$VE_1 = (0{,}5)(+1) + (0{,}5)(-1) = 0$$

Ambos esperan no ganar ni perder en la casilla (A, no creer)

- *Casilla (R, no creerselo): j1 recibe rey, dice rey y j2 no le cree. Las ganancias aquí son (0,5, -0,5):*

  →j1 recibe un as con probabilidad de 0,5 y dice que es as, no farolea, j2 no le cree→j1 gana 1$
  →j1 recibe un rey con probabilidad de 0,5 y dice que es rey→ j1 no gana nada

  El VE de ganancia de j1, será:

$$VE_1 = (0{,}5)(+1) + (0{,}5)(0) = 0{,}5$$

- *Casilla (R, creerlo): j1 recibe rey, dice rey y j2 lo cree: Las ganancias son (0,25, -0,25):*

  →Si j1 recibe rey con probabilidad 0,5 y dice rey, j2 le cree→j1 gana 0 $
  →Si j1 recibe as con probabilidad 0,5 y dice as, j2 se lo cree→j1 le gana ½ $

  La ganancia esperada de j1 será:

$$VE_1 = (0{,}5)(0{,}5) + (0{,}5)(0) = 0{,}25$$

Por tanto **el póker del mentiroso no tiene equilibrio en estrategias puras** y hay que **buscarlo en estrategias mixtas**, donde ninguno de los dos jugadores es completamente predecible.

Consideremos al jugador 1:

Si p2(no creerlo) es la probabilidad de que j2 no crea lo que dice j1

Si p2 (creerlo) es la probabilidad de que j2 si crea lo que dice j1

Las estrategias A y R de j1 obtienen la misma ganancia si:

0,5p2(creerlo)=0,5p2(no creerlo)+0,25p2(creerlo)

De donde se deduce que

0,25p2(creerlo)=0,5p2(no creerlo)

Luego, j2 debería creer a j1 el doble número de veces que las que no le cree. Lo que significa que:

p2(creerlo)=0,67*

p2(no creerlo)=0,33*

Consideremos al jugador 2:

Sea p1(A) la probabilidad de que j1 diga que la carta es As cuando recibe rey

Sea p1 (R) la probabilidad de que j1 diga que es rey cuando recibe un rey

Las estratégias Creer y No Creer de j2 recibirán igual ganancia si:

$$p_1(\mathrm{R})(-0{,}5) = p_1(\mathrm{A})(-0{,}5) + p_1(\mathrm{R})(-0{,}25)$$

de donde,

$$0.25p_1(\mathrm{R}) = 0.5p_1(\mathrm{A})$$

Luego, j1 debería decir la verdad el doble número de veces que las que miente. Lo que significa que:

p1(R)=0,67*

p1(A)=0,33*

Este par de distribuciones de probabilidad son la solución al póquer del mentiroso→se requiere que j1 mienta mucho:

La probabilidad de que j1 mienta es 0,17:

- cuando j1 recibe as, probabilidad 0,5, y dice as, está diciendo la verdad
- cuando j1 reciba rey, probabilidad 0,5, dos de cada tres veces dirá rey pero el resto mentirá.

*0,5*0,33=0,17*

Esta misma probabilidad de mentir coincide con el valor esperado de j1 de jugar al Póquer del mentiroso→ sustituimos los valores de la estrategia mixta de equilibrio p2(creérselo) y p2*(No creérselo) en el valor esperado del j1 de decir que la carta es as cuando realmente es rey:*

VE1=(0,33)(0)+(0,67)*(0,5)=0,33$*

Es la misma respuesta si utilizamos el valor esperado de j1 de decir que la carta es rey cuando sí es rey→por cada dólar que juega j1, espera ganar 0,33, es decir un 33%

Como el póquer del mentiroso es de suma cero→j2 espera perder esos 0,33$

La única forma justa de jugar al Póquer del mentiroso en la vida real es mediante turnos rotativos: cada jugador debe **tener las mismas probabilidades de ser el primero**.

Al pie de la figura 3.3 se explica cómo se obtiene la primera fila de la forma normal a partir de la forma extensiva, pero no la segunda fila. Vamos a repasar la primera fila.

El jugador 2 sabe que cuando el jugador 1 dice REY eso puede ser una verdad o una mentira, pero si dice AS estamos en lo mismo (puede ser verdad o no). El jugador 2 tiene que calcular con qué probabilidades le estarán diciendo la verdad.

***Casilla (A, creérselo).** El jugador 1 dice siempre AS, saque lo que saque. El jugador 2 siempre se lo cree. Casos:*

1. Sale un AS realmente, y el jugador 2 se lo cree. Vayamos al árbol. Estamos en (0,5, -0,5). ¿Eso agota todas las posibilidades a las que aplicar (A, creérselo)? No. Hay otra.

2. Sale un REY. El jugador 1 miente, y dice AS. El jugador 2 se lo cree. Vayamos al árbol. Estamos en (0,5, -0,5), pero el de más abajo.

Ahora, ¿con qué probabilidades se da una situación o la otra? Cada una puede ocurrir con un 50% (p = 0,5). Como los resultados son los mismos da igual promediar. En la casilla (A, creérselo) va (0,5, -0,5).

***Casilla (A, no creérselo).** El jugador 1 dice siempre "As", saque lo que saque. El jugador 2 no se lo cree. Casos:*

1. Sale un AS realmente, y el jugador 2 no se lo cree. Vayamos al árbol. Estamos en (1, -1). ¿Eso agota todas las posibilidades a las que aplicar (A, no creérselo)? No. Hay otra.

2. Sale un REY. El jugador 1 miente, y dice AS. El jugador 2 no se lo cree. Vaya al árbol. Estamos en (-1, 1).

Ahora, ¿con qué probabilidades se da una situación o la otra? Cada una puede ocurrir con un 50%. Por tanto: VE(A, no creérselo)= 0,5(1, -1) + 0,5(-1, 1) = (0, 0).

La casilla ***(R, No creérselo)*** *implica que el jugador 1 no miente y dice REY cuando recibe esa carta. El jugador 2 no se lo cree. Esa casilla se construye así:*

1) El jugador 1 recibe un AS y dice que es un AS. El jugador 2 no se lo cree. Vamos al árbol. Obtenemos (1, -1). Hay otra posibilidad.

2) El jugador 1 recibe REY y dice que es un REY. El jugador 2 no se lo cree. Vamos al árbol. Obtenemos (0, 0).

*Cada uno de los casos analizados ocurre con una probabilidad del 50% (p = 0,5). La ganancia media para el jugador 1 es 1*0,5 + 0*0,5 = 0,5. La ganancia media para el jugador 2 es -1*0,5 + 0*0,5 = -0,5.*

La casilla ***(R, No creérselo)*** *tendrá como resultados (0,5, -0,5).*

Casilla (R/Creérselo)*. El jugador 1 no miente y dice REY cuando recibe esa carta. El jugador 2 se lo cree. Esa casilla se construye así:*

1) El jugador 1 recibe un AS y dice que es un AS, el jugador 2 se lo cree. Vayamos al árbol. Estamos en (0,5, -0,5).

2) El jugador 1 recibe un REY y dice que es un REY. El jugador 2 se lo cree. Vayamos al árbol. Estamos en (0, -0).

Cada uno de los casos analizados ocurre con una probabilidad del 50% (p = 0,5).

*La ganancia media para el jugador 1 es 0,5*0,5 + 0*0,5 = 0,25.*

*La ganancia media para el jugador 2 es -(0,5)*0,5 + 0*0,5 = -0,25.*

La casilla ***(R, creérselo)*** *tendrá como resultados (0,25, -0,25).*

Hay que tener en cuenta las probabilidades de que aparezca una u otra carta.

El cruce de R/No creérselo se construye así:

- Con probabilidad 0,5 el jugador 1 recibe un as y dice que es un as, el jugador 2 no se lo cree, de forma que el jugador 1 gana 1 y el jugador 2 pierde -1.

- Con probabilidad 0,5 el jugador 1 recibe un rey y dice que es un rey. Ambos reciben 0.

*La ganancia media para el jugador 1 es 1*0,5 + 0*0,5 = 0,5*

*La ganancia media para el jugador 2 es -1*0,5 + 0*0,5 = -0,5*

El cruce de R/Creérselo se construye así:

- Con probabilidad 0,5 el jugador 1 recibe un as y dice que es un as, el jugador 2 se lo cree, de forma que 1 gana 0,5 y 2 pierde -0,5.

- Con probabilidad 0,5 el jugador 1 recibe un rey y dice que es un rey. Ambos reciben 0.

*La ganancia media para el jugador 1 es 0,5*0,5 + 0*0,5 = 0,25*

*La ganancia media para el jugador 2 es -(0,5)*0,5 + 0*0,5 = -0,25*

Para resolver los problemas de estrategias mixtas hay dos formas:

1. Usar las funciones de pagos;

2. Usar una propiedad específica de las funciones de pagos, a saber, que sus dos primeros componentes tienen el mismo valor que los dos últimos (igualdad de los valores esperados de cada estrategia para cada jugador).

Tenemos que calcular una *función de resultados o de pagos* para cada jugador, 1 y 2.

Para j1, si **la estrategia 1 se juega** una proporción ***p*** del total **de las veces**, expresado en tantos por uno ($0<p<1$), **la estrategia 2 se jugará 1-*p*** veces.

Para el j2 tendremos ***q* para su estrategia 1** y **1-*q* para su estrategia 2.**

		Jugador 2	
Jugador 1		Estrategia 1	Estrategia 2
	Estrategia 1	***p q***	***p (1-q)***
	Estrategia 2	***(1-p) q***	***(1-p) (1-q)***

Las funciones de resultados o pagos de cada jugador (las llamamos FP_1 y FP_2) consisten en la suma –ponderada por las probabilidades- de los resultados de cada jugador.

El jugador 1 tiene sus resultados en cada casilla, a la izquierda de la coma, y el jugador 2 a la derecha de la coma.

Sumamos para cada jugador los suyos, tomándolos de las cuatro casillas de la Figura 3.3.b, pero ponderados por los productos de probabilidades que acabamos de mostrar en la tabla de arriba.

$$FP_1 = 0pq + 0{,}5p(1\text{-}q) + 0{,}5(1\text{-}p)q + 0{,}25(1\text{-}p)(1\text{-}q) =$$

$$= 0{,}25p - 0{,}75pq + 0{,}25q + 0{,}25$$

$$FP_2 = 0pq - 0{,}5p(1\text{-}q) - 0{,}5(1\text{-}p)q - 0{,}25(1\text{-}p)(1\text{-}q) =$$

$$= - 0{,}25p + 0{,}75pq - 0{,}25q - 0{,}25$$

Maximizamos ambas funciones, **derivando e igualando a cero**. Derivamos FP_1 con respecto a *p* porque esa es la variable sobre la que decide el jugador 1, y derivamos FP_2 con respecto a *q* porque esa es la variable que controla el jugador 2.

$$FP_1/dp = 0{,}25 - 0{,}75q = 0$$

Obtenemos q = 1/3. Obviamente q es p_2(no creérselo), siendo (1-q) = 2/3 la estrategia p_2(creérselo).

$$FP_2/dq = - 0{,}25 + 0{,}75p = 0$$

Obtenemos p = 1/3. Obviamente p es p_1(A), siendo (1-p) = 2/3 la estrategia p_1(R).

Podemos utilizar también las funciones de resultados o de pagos para calcular el valor esperado del juego para cada jugador. Obviamente $FP_1 = VE_1^*$.

$$FP_1 = 0{,}25p - 0{,}75pq + 0{,}25q + 0{,}25 =$$

$$=0{,}25(1/3) - 0{,}75(1/3)(1/3) + 0{,}25(1/3) + 0{,}25 = 0{,}33$$

Dado que el juego es de suma cero (los resultados de cada casilla de la Figura 3.3b son iguales con signos distintos), sabemos que $FP_2 = VE_2^*= -0{,}33$.

Por tanto, mintiendo (estrategia A) el 33% de las veces (p = 1/3) conseguimos maximizar el valor esperado del juego para el jugador 1, que obtiene un beneficio de 0,33 céntimos por cada dólar apostado. Todo gracias a un uso optimizado de la mentira. Ese uso optimizado es el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, y hay dos formas de calcularlo: como hace el libro o como hemos enseñado aquí.

El libro aplica el principio de igual valor para las dos estrategias alternativas de cada jugador. Esto es lógico: cada jugador combina las estrategias a su alcance de manera que ambas proporcionen el mismo resultado. Si no fuera así, pasaría a usar más veces la que da mayor rendimiento y menos la menos rentable.

Por tanto (tomemos al jugador 1 como muestra):

$$FP_1 = 0pq + 0{,}5p(1\text{-}q) + 0{,}5(1\text{-}p)q + 0{,}25(1\text{-}p)(1\text{-}q).$$

La estrategia A proporciona un valor medio igual a $VE(A) = 0pq + 0{,}5p(1\text{-}q)$; y la estrategia R un valor medio igual a $VE(R) = 0{,}5(1\text{-}p)q + 0{,}25(1\text{-}p)(1\text{-}q)$. Ambas deben combinarse de forma que VE(A) = VE(R), y por tanto:

$$0pq + 0{,}5p(1\text{-}q) = 0{,}5(1\text{-}p)q + 0{,}25(1\text{-}p)(1\text{-}q)$$

Tendremos una igualdad similar para el jugador 2, y juntas forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, fácil de resolver. Debemos obtener el mismo resultado que por el otro procedimiento, claro.

Recuerde que:

p = p(A),

(1-p)=p(R),

q = p(creérselo) y

(**1-q**) = **p(no creérselo**).

3.4.- Equilibrio en estrategias mixtas de juegos de coordinación y problemas de coordinación

Algunos de los **equilibrios no pueden verse a partir del diagrama de flechas**.

Coordinación de sistemas de vídeo:

- Juego con **dos equilibrios en estrategias puras**, ambos **simétricos.**
- **Nada sugiere la existencia de otro equilibrio**.

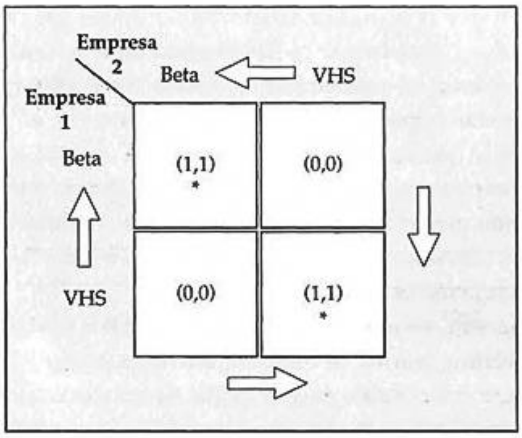


Figura 2.10. Coordinación de sistemas de vídeo.

No obstante, consideremos lo siguiente:

- **Ni Beta ni VHS domina** al contrario,
- Los **dos equilibrios en estrategias puras** se sitúan **en esquinas opuestas** en la matriz del juego.
- Esto **pasa normalmente cuando las ecuaciones que determinan un equilibrio en estrategias mixtas tienen solución.**

Sea **p1(Beta):** la probabilidad de que E1 escoja Beta

Sea **p1 (VHS)**: la probabilidad de que E1 escoja VHS

Sea **p2(Beta):** la probabilidad de que E2 escoja Beta

Sea **p2 (VHS)**: la probabilidad de que E2 escoja VHS

Consideremos las **ganancias de E1**:

- Supondremos que E1 escoge Beta, **p1(Beta),** y E2 utiliza una estrategia mixta, **p2=[p2(Beta), p2(VHS)]**

- Como E2 emplea estrategia mixta, **E1** tiene los siguientes valores esperados:

- Valor Esperado de **E1 Beta**:

  Cuando **E2 escoge beta**, hay c**oordinación** y **E1 gana +1** y

  Cuando **E2 escoge VHS, no hay coordinación** y **E1 no gana nada**.

$$VE_1(\text{Beta}) = p_2(\text{Beta})(+1) + p_2(\text{VHS})(0)$$

- Valor Esperado de **E1 por elegir VHS**: E1 utiliza su otra estrategia pura, VHS, pero E2 utiliza la mixta→

  Cuando **E2 escoge beta**, **no hay coordinación** pero

  Cuando **E2 escoge VHS sí la hay** y **E1 gana +1**

$$VE_1(\text{VHS}) = p_2(\text{Beta})(0) + p_2(\text{VHS})(+1)$$

Igualando las ganancias de ambas estrategias puras de E1:

$$VE_1(\text{Beta}) = VE_1(\text{VHS})$$

$$p_2(\text{Beta})(+1) + p_2(\text{VHS})(0) = p_2(\text{Beta})(0) + p_2(\text{VHS})(+1)$$

Para que la estrategia mixta de E2 sea distribución de probabilidad, la suma de las probabilidades de la E2 **es igual a 1:**

$$p_2(\text{Beta}) + p_2(\text{VHS}) = 1$$

- **Resolviendo la ecuación** con dos incógnitas obtenemos:

$$p_2^*(\text{Beta}) = p_2^*(\text{VHS}) = 0{,}5$$

que son **los valores de equilibrio de estrategia mixta de E2.**

Como hay simetría, **podríamos calcular la misma estrategia mixta para el equilibrio de E1**: Los sustituimos para obtener el Valor Esperado de la empresa 1 en Beta:

VE1(Beta) = 0.5 * (+1) = 0.5

VE1(VHS) = 0.5

En equilibrio en **estrategias mixtas de Coordinación** de sistemas de vídeo, cada empresa obtiene un **Valor Esperado de 0.5**.

Esta ganancia tan baja se debe a que la mitad de las veces las dos empresas no adoptarán el mismo sistema de vídeo.

Aunque estas ganancias **son simétricas (ambas empresas reciben la misma ganancia),** resultan **insignificantes si se comparan con las** de cualquiera **de los equilibrios simétricos en estrategias puras, en los que se obtiene el doble.**

3.5.- Equilibrios asimétricos en estrategias mixtas

Hasta ahora todos los equilibrios en estrategias mixtas han sido simétricos.

Un equilibrio en estrategias mixtas también **puede ser asimétrico**, si hacemos algo ligeramente asimétrico.

Oportunidad del mercado asimétrico:

- **E1 obtiene ganancias 150 si aprovecha solo ella la oportunidad** de mercado
- En caso contrario el juego será el de la figura 3. 2 →donde **los cambios reflejan la ventaja competitiva que E1 tiene sobre E2 si es la única que entra en el mercado** y que podría deberse a costes más bajos, mejor mk…

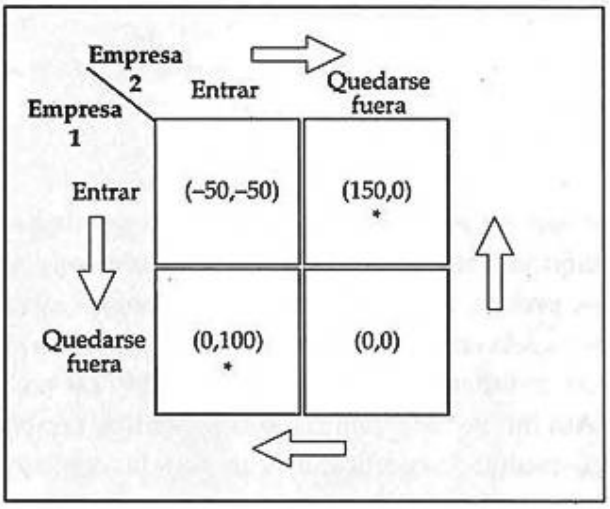


Figura 3.4. Oportunidad de mercado asimétrico.

- Tiene equilibrios en estrategias puras cuyas ganancias son (150, 0) y (0, 100).
- Tiene un equilibrio asimétrico en estrategias mixtas:

  Sea **p1(entrar)** la probabilidad de que E1 entre en el mercado

  Sea **p1 (quedar fuera)** la probabilidad de que E1 se quede fuera

  Sea **p2(entrar)** la probabilidad de que E2 entre en el mercado

  Sea **p2 (quedar fuera)** la probabilidad de que E2 se quede fuera

Calculamos las <u>ganancias de E1:</u>

E1 entra en el mercado, **p1(entrar)**, mientras E2 usa estrategia mixta, **p2=[p2(entrar), p2(quedarse fuera)]** → como E2 utiliza estrategia mixta, E1 se enfrenta al siguiente **valor esperado**

$$VE_1(\text{entrar}) = p_2(\text{entrar})(-50) + p_2(\text{quedarse fuera})(150)$$

E1 utiliza su otra estrategia pura y queda fuera del mercado, **p1 (quedar fuera),** y E2 utiliza la estrategia mixta, **p2=[p2(entrar), p2(quedarse fuera)]**

Haga lo que haga E2, la E1 gana 0

Si igualamos estos dos valores esperados: VE1 (entrar) = VE1 (quedar fuera) = 0, tenemos que

$$p_2(\text{entrar})(-50) + p_2(\text{quedarse fuera})(150) = 0$$

A esta condición le añadimos el requisito de que **la suma de probabilidades de E2 es igual a 1, por ser estrategia mixta:**

$$p_2(\text{entrar}) + p_2(\text{quedarse fuera}) = 1$$

y resolvemos la ecuación con dos incógnitas y tenemos:

$$p_2^*(\text{entrar}) = \frac{3}{4}; \qquad p_2^*(\text{quedarse fuera}) = \frac{1}{4}$$

y

Comparando con la versión simétrica de Oportunidad de mercado, la empresa menos eficiente entra en el mercado con una probabilidad algo mayor (de 3/4 en lugar de 2/3).

Como antes, **la empresa 1 ni gana ni pierde en el equilibrio en estrategias mixtas**.

Obtenemos los Valores Esperados de E1, y **sustituyendo:**

$$VE_1(\text{entrar}) = \left(\frac{3}{4}\right)(-50) + \left(\frac{1}{4}\right)(150) = 0 = VE_1(\text{quedarse fuera})$$

Comprobamos las ganancias de E2: No han cambiado→ las probabilidades de la estrategia mixta de E1 no cambian:

$$p_1^*(\text{entrar}) = \frac{2}{3};$$

y

$$p_1^*(\text{quedarse fuera}) = \frac{1}{3}$$

E2 sigue esperando ni ganar ni perder en equilibrio de estrategias mixtas:

$$VE_2(\text{entrar}) = \left(\frac{2}{3}\right)(-50) + \left(\frac{1}{3}\right)(100) = 0 = VE_2(\text{quedarse fuera})$$

Como antes, **E1 ni gana ni pierde en el equilibrio en estrategias mixtas**. Y, **E2 sigue esperando ni ganar ni perder en el equilibrio de estrategias mixtas.**

Como esta versión de Oportunidad de mercado es asimétrica→ **las consideraciones de simetría ya no tienen razón de ser.**

La simetría era el único punto a favor del equilibrio en estrategias mixtas→ resulta muy tentador **dejar de prestar atención a este equilibrio como solución**.

Cada uno de los resultados de los **equilibrios asimétricos en estrategias puras ya no es una imagen invertida del otro.**

El equilibrio (entrar, quedarse fuera) en el que corresponde a **la empresa más eficiente entrar en el mercado**, proporciona la **ganancia total más alta**, y **el equilibrio con las ganancias menores domina también al equilibrio en estrategias mixtas** →el empate en las ganancias de la empresa 2 evita que esta dominancia sea estricta.

Todo esto hace que **(quedarse fuera, entrar)** sea un **candidato atractivo a ser solución del juego.**

Los pequeños comercios se enfrentan a un problema de coordinación como en Oportunidad de mercado asimétrico, con la diferencia de que ya no están en el mercado.

Una **promoción no funciona si todos los comercios la inician al tiempo**; es **mejor** hacerla de **sorpresa**→esto reclama solución en estrategias mixtas.

Equilibrios de Nash asimétricos en estrategias mixtas.

Vamos a explicar un poco este epígrafe de una forma diferente. La idea es que en casos asimétricos como este que se presenta aquí el equilibrio de Nash en estrategias mixtas puede no tener sentido. El juego en forma normal se presenta en la Figura 3.4 de la página 92:

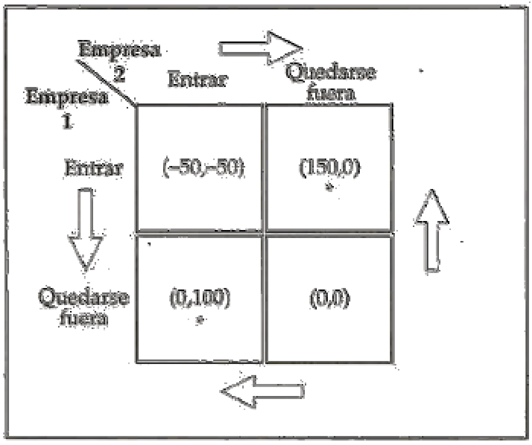


Figura 3.4. Oportunidad de mercado asimétrico.

Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras, que son las casillas marcadas con asteriscos. Vamos a calcular la estrategia mixta por el otro procedimiento que hemos presentado antes, aplicando a los resultados de la Figura 3.4 la matriz de probabilidades (siempre la misma) y calculando después las funciones de resultados:

			Empresa 2
		Estrategia 1	Estrategia 2
	Estrategia 1	p q	p (1-q)
Empresa 1	Estrategia 2	(1-p) q	(1-p) (1-q)

Recordamos que las funciones de resultados o pagos de cada jugador (las llamamos FP_1 y FP_2) consisten en la suma –ponderada por las probabilidades- de los resultados de cada jugador. La Empresa 1 tiene sus resultados en cada casilla, a la izquierda de la coma, y La Empresa 2 a la derecha de la coma. Sumamos para cada jugador los suyos, tomándolos de las cuatro casillas, pero ponderados por los productos de probabilidades que acabamos de mostrar en la tabla de arriba.

$FP_1 = -50pq + 150p(1-q) + 0(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = - 200pq + 150p$

$FP_2 = -50pq + 0p(1-q) + 100(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = - 150pq + 100q$

Las maximizamos, derivando FP_1 con respecto a p y FP_2 con respecto a q e igualamos a cero.

$dFP_1/dp = - 200q + 150 = 0$

de donde $q = 150/200 = 3/4$ y por tanto $(1-q) = 1/4$

$dFP_2/dq = - 150p + 100 = 0$

de donde $p = 100/150 = 2/3$ y por tanto $(1-p) = 1/3$

Obviamente p es lo que el libro llama p_1(entrar) y (1-p) es p_1(no entrar); mientras que q es p_2(entrar) y (1-q) es p_2(no entrar). **Las probabilidades son diferentes para uno y otro jugador porque el juego es asimétrico**[1].

Vamos a ver la eficiencia de esos equilibrios. La eficiencia se mide como la diferencia entre la suma de resultados obtenida y la mínima en el juego, dividida por la diferencia entre máxima suma de resultados obtenible menos la mínima.

Primer equilibrio de Nash en estrategias puras: Empresa 1 entra, Empresa 2 se queda fuera. Suma de resultados de ambas empresas: 150 + 0 = 150. Mínima suma de resultados que se puede obtener en el juego (entrar, entrar) - 50 - 50 = - 100. Máxima suma de resultados que se puede obtener en el juego: precisamente Empresa 1 entrar, Empresa 2 no entrar: 150 + 0 = 150.

Eficiencia: (Dif resultado - min)/(Dif max-min) = [150 - (-100)] / [(150 - (-100)] = 250/250 = 1 (100%)

Segundo equilibrio de Nash en estrategias puras: Empresa 1 no entra, Empresa 2 entra. Suma de resultados: 0 + 100 = 100.

Eficiencia: [100 - (-100)] / [(150 - (-100)] = 200/ 250 = 0,8 (80%)

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: Empresa 1 p_1(entra) = 2/3 y p_1(no entra) = 1/3. Empresa 2 p_2(entra) = 3/4 y p_2(no entra) = 1/4.

Los valores esperados de entrar y no entrar para cada empresa se igualan, y son cero:

$VE_1(\text{entrar}) = -50(3/4) + 150(1/4) = 0 = VE_1(\text{no entrar})$

$VE_2(\text{entrar}) = -50(2/3) + 100(1/3) = 0 = VE_2(\text{no entrar})$

Los ceros se deben a que cuando la empresas no entran obtienen 0, haga lo que haga la otra.

Ahora en vez de sumar resultados sumamos valores esperados, que son ceros:

Eficiencia: [0 - (-100)] / [(150 - (-100)] = 100/ 250 = 0,4 (40%)

En términos de eficiencia lo mejor es que la empresa 1 vaya al nicho y la 2 se quede fuera, uno de los equilibrios de Nash en estrategias puras.

La segunda mejor opción es el otro equilibrio de Nash en estrategias puras, en el que 1 se queda fuera y entra 2.

La peor es el equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Además, las estrategias puras garantizan al menos un beneficio mínimo de 0 para una empresa en cualquier situación, con un beneficio positivo para la otra.

La estrategia mixta sólo garantiza un valor esperado de cero, en promedio, para ambas. Por eso se dice que las estrategias puras dominan débilmente a la mixta (ofrecen lo mismo para una empresa y más para otra).

3.6.- <u>Precios bajos cada día</u> (más bajos que los ordinarios pero superiores a los de rebajas)

Soluciona el punto anterior

A veces, abandonar una estrategia mixta es la peor de las soluciones.

Cuando **las empresas** utilizan **los precios como variable estratégica**, intentan **mantener el precio por encima del coste marginal**→ mientras **sus productos estén diferenciados**, podrán conseguirlo **en un equilibrio de estrategias puras.**

Existen **presiones competitivas** que **empujan los precios hacia el coste marginal**.

<u>Modelo simple de promociones:</u>

Lado de la *Oferta:*

- Dos empresas, **e1 y e2 compiten en precios**.
- Cada una puede **elegir entre precio normal, PN, y precio promocional, PP,** para un electrodoméstico.
- **PN>PP**
- **PP puede estar por encima del coste**
- **El coste por unidad es constante**

Lado de la *Demanda*:

- Dos tipos de compradores:

    - **Compradores desinformados, d**, que **compran a cualquier precio que no supere PN**
    - **Compradores informados, i**, van de tienda en tienda **buscando el precio más bajo,** a los que **les puede atraer una rebaja en precio**.

Ejemplo:

Por el lado de la oferta:

- *PN= 600$*

- *PP= 500$*

- *Coste unidad: 450$ (por debajo del PN y del PP)*

Por el lado de la demanda:

- *d= 100 que se presentan de forma aleatoria en cada empresa, E1 y E2 → cada empresa espera hacer 100/2=50 ventas a compradores d a cualquier precio. No son sensibles al precio.*

- *i=120 compradores a los que atraer con rebajas (también se distribuyen aleatoriamente).*

Supongamos que ambas empresas fijan un precio normal:

- *Cada empresa vende solo a compradores d (50 Uds.), con un precio marginal de 150$ por unidad:*

  PN- Coste por Ud.= 600-450=150$

- *Esto proporciona un beneficio total de 150$*50 Uds.=7.500 $ → no es equilibrio*

- *Si **E1 decide iniciar una promoción**, **reduciendo el precio** de venta hasta 500$, su **beneficio marginal se reduce** hasta 50$ por Ud.; pero **sus ventas se pueden incrementar** desde 50 Uds. hasta 170 Uds. (se añaden 120 compradores i)*

- *Ahora los beneficios de E1 pasan a: 50$*170 Uds.= 8.500$ →**E1 aumenta sus beneficios bajando el precio, por lo que no es un equilibrio que todas las empresas cobren un precio normal.***

- ***Si ambas fijan un precio de rebajas tampoco habrá equilibrio**, ya que <u>cada empresa venderá a 50 compradores d + 60 compradores i</u>*

- *El beneficio marginal de cada empresa es 50$ al precio de rebajas→ los beneficios son 50$*110 Uds.=5.500$, que tampoco es un equilibrio.*

- *Supongamos que E2* ***vuelve a fijar su precio al nivel normal→ E2 triplica su beneficio*** *marginal, de 50$ a 150$ y aún mantiene su base de 50 compradores d.*

- ***El nuevo beneficio de E2*** *con este aumento de precios es 150*50 Uds.=7.500$* ***→tampoco hay equilibrio cuando*** *todas las empresas* ***cobran el precio en rebajas.***

La **forma normal de juego Precios Bajos cada día**:

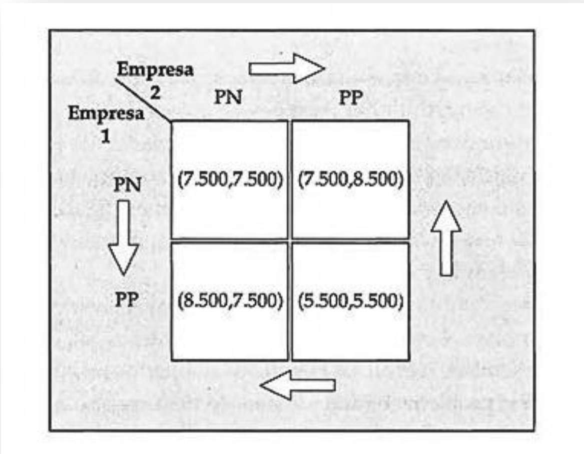


Figura 3.5. Precios bajos cada día.

Como **hay simetría**, **ninguna de las empresas va a abandonar** y dejar a la otra ganar más dinero (**no hay equilibrio de Nash**).

Las empresas **utilizan estrategias mixtas** y estas conducen a un **ciclo de precios en el que las empresas fluctúan constantemente entre precios normales y precios de rebajas** al utilizar sus estrategias mixtas.

Con una estrategia mixta, una empresa cobra un precio normal algunas veces y un precio de rebajas el resto de las veces.

Hagan lo que hagan las empresas, hay un **elemento de sorpresa**.

Introducimos *los conceptos de* ***probabilidades:***

Sea p(PN) la probabilidad de cobrar un precio normal

*Sea p(PP) la probabilidad de cobrar un precio en rebajas (*Las dos empresas ven el juego de la misma forma, por lo que no hace falta conocer la identidad de las empresas para realizar los cálculos):

- **En un equilibrio en estrategias mixtas, el beneficio esperado por cobrar el precio normal VE(PN) = VE(PP).**

  Si una empresa cobra un PN, tiene un beneficio de 7.500$ y si cobra con precio en rebajas, espera un beneficio de

$$VE(PP) = 8.500p(PN) + 5.500p(PP)$$

En un equilibrio de estrategias mixtas, los beneficios al precio normal han de ser iguales a los beneficios en rebajas, luego

7.500p(PN) = **VE(PN**)= VE(PP)

La condición de **suma de probabilidades = 1**:

$p(PP) + p(PN) = 1 \rightarrow p(PP) = 1- p(PN)$

Las probabilidades que conseguiremos con esta igualdad serán:

$$p(PN)^{*} = \frac{2}{3} \qquad p(PP)^{*} = \frac{1}{3}$$

y

En este equilibrio en estrategias mixtas, cada empresa espera ganar** 7.500$, **como si cobraran precios normales.

VE(PP)=8.500$*2/3+5.500$*1/3= 7.500$

En un **equilibrio en estrategias mixtas**, **los beneficios a PN han de ser iguales a los beneficios al PP.**

Si **una empresa lanza una promoción la tercera parte de las veces, defenderá sus beneficios** frente a su competidor.

Su **promoción será efectiva porque aparecerá por sorpresa**.

Lanzar promociones con frecuencia adecuada sirve para defender un nivel de beneficios equivalente a los que se obtienen con precios normales.
Poner **precios de rebajas es como un farol** en el Póquer del mentiroso: <u>los buenos jugadores lo hacen, pero no más de las veces necesarias.</u> Hallar **el equilibrio en estrategias mixtas permite determinar cuántas veces hay que dar una sorpresa.**

Una **política de promociones** involucra **estrategias mixtas.**

Una estrategia que contempla **lanzar promociones sólo algunas veces puede ser mejor que cobrar precios bajos cada día.**

Cuando **en una competencia en precios** se juega un **equilibrio en estrategias mixtas**, **los precios observados forman un ciclo.**

Aquí, **el criterio de simetría en ganancias (justicia) es el más importante**, por encima del criterio de eficiencia.

> Se debe a que **el juego es simétrico** porque **ambas empresas son iguales**: tienen las mismas estructuras de costes y las mismas funciones de demanda. **Las dos ganan con el equilibrio en estrategias mixtas lo mismo** (7.500 cada una), lo cual es importante dada la simetría del juego.

Con un **equilibrio de Nash en estrategias puras los beneficios globales serían mayores**, pero **esa solución se descarta** porque **ninguna empresa aceptaría ganar menos que la otra**, y respondería con rebajas de precios que conducirían a peor resultado para todos.

Las estrategias mixtas ofrecen una solución al juego, **que no es el más eficiente pero es justa**, y por tanto aceptada por ambos jugadores y estable.

¿Cómo se resuelve paso a paso el problema de estrategias mixtas de precio alto y precio bajo?

Miremos la Figura 3.5 de la página 95.

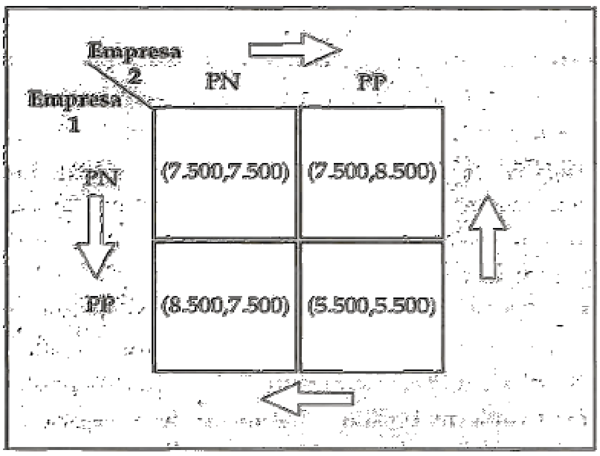


Figura 3.5. Precios bajos cada día.

Los números se han rellenado a partir de los supuestos de ventas, precio y coste por unidad de la página 94.

Imagina que VE(PP) se refiere a la empresa 1. Daría lo mismo pensar que hablamos de la empresa 2, porque este juego es simétrico.

Los resultados para la empresa 1 son los que están a la izquierda de la coma, en todas las casillas. Si elige PN la empresa 1 obtendrá 7500 haga lo que haga la empresa 2. Si elige PP su beneficio dependerá de lo que haga la empresa 2.

VE (PP) se construye con los datos a la izquierda de la coma en la segunda fila.

Suponga que la empresa 1 elige PP, su segunda fila. ¿Qué obtendrá? No puede saberlo porque depende de lo que haga la empresa 2.

Podemos calcular lo que espera obtener en promedio. Eso es la VE(PP).

Tome el primer valor a la izquierda de la coma de la segunda fila, 8500, y multiplíquelo por la probabilidad de que la empresa 1, eligiendo la segunda fila (PP) caiga en esa casilla. Esa probabilidad es la probabilidad de que la empresa 2 elija la primera columna, es decir, PN. Después tome el segundo valor a la izquierda de la coma en la segunda fila, 5500, y lo multiplica por la probabilidad de caer en esa casilla, que es la probabilidad de que la empresa 2 elija precisamente la segunda columna, PP.

Por tanto, para la empresa 1:

VE(PP) = 8500*p(PN)+5500*p(PP).

Observe que p(PN) + p(PP) = 1.

Podemos calcular si quiere VE(PN), que es, para la empresa 1, su primera fila, pero ya verá que da un número fijo:

VE(PN) = 7500*p(PN)+7500*p(PP) = 7500*[p(PN)+p(PP)] = 7500

Igualamos: VE(PN) = VE(PP)

7500 = 8500*p(PN)+5500*p(PP)

Es una ecuación con dos incógnitas, pero sabemos que

p(PN) + p(PP) = 1
Ya tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. Se puede resolver de muchas formas, pero

p(PN) = 1 - p(PP)

7500 = 8500*[1-p(PP)]+5500*p(PP)

7500 = 8500 - 8500p(PP) + 5500*p(PP)

3000p(PP) = 1000

p(PP) = 1/3

Dado que p(PN) = 1 - p(PP)

p(PN) = 2/3

Vamos a llegar a los mismos porcentajes por la vía de las *funciones de pagos o resultados*, obteniendo antes las probabilidades para cada jugador. Para ello, aplicamos nuestra matriz de probabilidades a los resultados de la Figura 3.5:

			Empresa 2
		Estrategia 1	Estrategia 2
	Estrategia 1	p q	p (1-q)
Empresa 1	Estrategia 2	(1-p) q	(1-p) (1-q)

Las funciones de resultados o pagos de cada jugador (las llamamos FP_1 y FP_2) consisten en la suma –ponderada por las probabilidades- de los resultados de cada jugador. La Empresa 1 tiene sus resultados en cada casilla, a la izquierda de la coma, y La Empresa 2 a la derecha de la coma. Sumamos para cada jugador los suyos, tomándolos de las cuatro casillas, pero ponderados por los productos de probabilidades que acabamos de mostrar en la tabla de arriba.

$FP_1 = 7500pq + 7500p(1-q) + 8500(1-p)q + 5500(1-p)(1-q)$

$FP_2 = 7500pq + 8500p(1-q) + 7500(1-p)q + 5500(1-p)(1-q)$

El siguiente paso consiste en ordenar un poco esas sumas. Lo vamos a hacer sólo para la Empresa 1, ya que el juego es totalmente simétrico:

$FP_1 = 7500pq + 7500p – 7500pq + 8500q – 8500pq + 5500 – 5500q – 5500p + 5500pq$

$FP_1 = 2000p + 3000q – 3000pq + 5500$

Ya está suficientemente ordenada la función, lo que nos permite derivar con comodidad. Recordamos que la variable p es el número de veces (sobre el total) que el jugador A toma la estrategia 1, y queremos hallar su valor de tal forma que el beneficio de la Empresa 1 –determinado por la función de resultados- sea máximo. Derivamos por tanto con respecto a p (consideramos q como una constante) e igualamos a cero:

$dFP_1/dp = 2000 – 3000q = 0$

de donde q = 2/3. Obviamente (1-q) = 1/3. Dado que el juego es perfectamente simétrico p = 2/3 y (1-p) = 1/3, aunque podemos tomar la función de pagos de 2, derivar con respecto a q e igualar a cero y obtenerlo.

Tanto la Empresa 1 como la 2 tienen un equilibrio de Nash en estrategias mixtas que consiste en emplear la estrategia 1 las 2/3 partes de las veces, y la estrategia 2 las restantes 1/3 partes de las veces. Recordamos que la estrategia 1 era precios normales (PN) y la estrategia 2 era precios de rebaja (PP).

Las dos empresas ganan con esta estrategia mixta lo mismo ($7.500 cada una), lo cual es importante dada la simetría del juego (las dos empresas tienen las mismas estructuras de coste y funciones de demanda). Este es un ejemplo en el que el criterio de simetría en ganancias (justicia) es relevante y más importante que el de eficiencia. Con un equilibrio de Nash en estrategias puras los beneficios globales serían mayores (una de las dos empresas obtendría $8.500 en vez de $7.500), pero esa solución se descarta porque ninguna empresa aceptaría ganar menos que la otra, y respondería con rebajas de precios que conducirían al peor resultado de todos. Las estrategias mixtas ofrecen una solución al juego, que no es la más eficiente pero es justa, aceptada por ambos jugadores y por tanto estable.

Resumen

1. Una estrategia pura no involucra al azar; una estrategia mixta, sí. Los jugadores utilizan una estrategia mixta cuando no quieren que su comportamiento sea predecible.
2. Un equilibrio en estrategias mixtas es un equilibrio en el que los jugadores utilizan estrategias mixtas. La solución al Juego de las monedas es un equilibrio en estrategias puras. Una manera de poner en práctica el equilibrio es que cada jugador lance una moneda al aire.
3. El juego Oportunidad de mercado es una alegoría del oligopolio natural, donde sólo hay sitio en el mercado para un número limitado de empresas. Tiene equilibrios tanto en estrategias puras como en estrategias mixtas.
4. Todas las estrategias puras que forman parte de una estrategia mixta deben obtener la misma ganancia esperada. Una estrategia mixta debe cumplir asimismo las leyes de la probabilidad. Hallar un equilibrio en estrategias mixtas en un juego 2×2 requiere resolver dos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, uno para cada jugador.
5. Las condiciones de dominancia en ganancias y simetría son incompatibles, como muestra el juego Oportunidad de mercado. Este conflicto entre los dos principios está relacionado con el conflicto entre eficiencia y equidad.
6. Un farol es un intento de confundir o engañar. El propósito de un farol es proteger el valor de la información que sólo uno posee. Las estrategias mixtas, como en el Póquer del mentiroso, son una forma práctica de hacer faroles.
7. Los juegos de coordinación, como Coordinación de sistemas de vídeo, tienen equilibrios en estrategias mixtas que están dominados en ganancias por los equilibrios en estrategias puras.
8. Oportunidad de mercado asimétrico tiene equilibrios asimétricos en estrategias puras y un equilibrio asimétrico en estrategias mixtas. El más eficiente de estos equilibrios es el equilibrio en estrategias puras en el que la empresa más eficiente entra en el mercado.
9. Una política de promociones involucra estrategias mixtas. Una estrategia que contempla lanzar promociones sólo algunas veces puede ser mejor que cobrar precios bajos cada día, como la experiencia de Sears en 1989-1990 demostró.
10. Cuando en una competencia en precios se juega un equilibrio en estrategias mixtas, los precios observados forman un ciclo.

Conceptos clave

estrategia pura
estrategia mixta
distribución de probabilidad
Oportunidad de mercado
farol
Oportunidad de mercado asimétrico
promociones

equilibrio en estrategias puras
equilibrio en estrategias mixtas
Juego de las monedas
dominancia en ganancias
Póquer del mentiroso
problema de coordinación
ciclo de precios

Problemas

1. Juego de las monedas asimétrico. Suponga que el jugador 1 gana +2 si se produce una pareja de caras; en caso contrario el juego es el mismo que en la figura 3.1. Halle el equilibrio en estrategias mixtas.

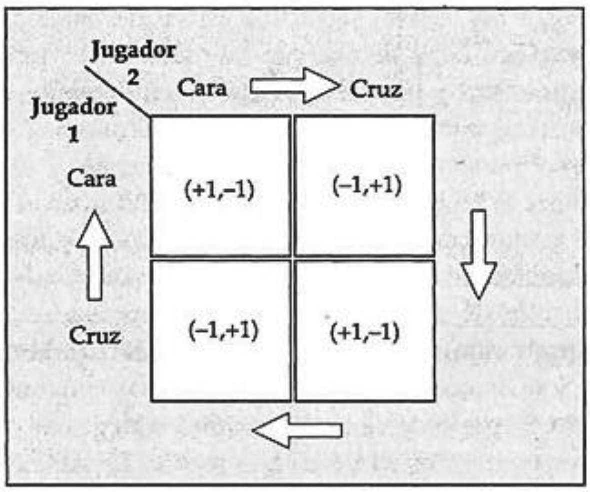


Figura 3.1. Juego de las monedas. Todas las ganancias están en centavos.

Construimos una matriz con los siguientes pagos o resultados:

			Jugador 2
		Cara	Cruz
	Cara	(+2, -1)	(-1, +1)
Jugador 1	Cruz	(-1, +1)	(+1, -1)

Piden el equilibrio en estrategias mixtas. Podemos hacerlo por el procedimiento que utiliza el libro o bien por el procedimiento alternativo que hemos explicado en el video de presentación de la asignatura.

Podemos igualar los valores esperados de cada estrategia para cada jugador, es decir: $VE_1(cara) = VE_1(cruz)$ y $VE_2(cara) = VE_2(cruz)$. Pasamos a hacer los cálculos paso a paso:

$$VE_1(cara) = VE_1(cruz)$$

$$VE_1(cara) = (+2)p_2(cara) + (-1)p_2(cruz)$$

$$VE_1(cruz) = (-1)p_2(cara) + (+1)p_2(cruz)$$

$$(+2)p_2(cara) + (-1)p_2(cruz) = (-1)p_2(cara) + (+1)p_2(cruz)$$

$$3p_2(cara) - 2\ p_2(cruz) = 0$$

Además, sabemos que

$$p_2(cara) + p_2(cruz) = 1$$

Tenemos pues dos ecuaciones con dos incógnitas, y resolvemos:

$$p_2(cara) = 1 - p_2(cruz)$$

Sustituimos:

$$3[1 - p_2(cruz)] - 2\ p_2(cruz) = 0$$

$$3 - 5p_2(cruz) = 0$$

$$p_2(cruz) = 3/5$$

$$p_2(cara) = 2/5$$

Para el otro jugador:

$$VE_2(cara) = VE_2(cruz)$$

$$VE_2(cara) = (-1)p_1(cara) + (+1)p_1(cruz)$$

$$VE_2(cruz) = (+1)p_1(cara) + (-1)p_1(cruz)$$

$$(-1)p_1(cara) + (+1)p_1(cruz) = (+1)p_1(cara) + (-1)p_1(cruz)$$

$$2p_1(cruz) - 2p_1(cara) = 0$$

Además, sabemos que

$$p_1(cara) + p_1(cruz) = 1$$

Tenemos pues dos ecuaciones con dos incógnitas, y resolvemos:

$$p_1(cara) = 1 - p_1(cruz)$$

Sustituimos:

$$2p_1(cruz) – 2[1 - p_1(cruz)] = 0$$

$$4p_1(cruz) – 2 = 0$$

$$p_1(cruz) = 1/2$$

$$p_1(cara) = 1/2$$

Esas probabilidades definen el equilibrio en estrategias mixtas.

Además de igualar los valores esperados de las estrategias de cada jugador, que es lo que acabamos de hacer y hace el libro siempre, hay **otra forma de detectar equilibrios de Nash en estrategias mixtas**. Para algunos resulta más fácil de entender y de calcular.

Tenemos que calcular una *función de resultados o de pagos* para cada jugador, 1 y 2. Si la estrategia 1 se juega una proporción p del total de las veces, expresado en tantos por uno ($0 \leq p \leq 1$), la estrategia 2 se jugará 1-p. Para el jugador 2 tendremos q para su estrategia 1 y 1-q para su estrategia 2.

			Jugador 2
		Estrategia 1	Estrategia 2
	Estrategia 1	p q	p (1-q)
Jugador 1	Estrategia 2	(1-p) q	(1-p) (1-q)

Las funciones de resultados o pagos de cada jugador (las llamamos FP_1 y FP_2) consisten en la suma –ponderada por las probabilidades- de los resultados de cada jugador. El jugador 1 tiene sus resultados en cada casilla, a la izquierda de la coma, y el jugador 2 a la derecha de la coma. Sumamos para cada jugador los suyos, tomándolos de las cuatro casillas de la matriz de la forma normal del juego, pero ponderados por los productos de probabilidades que acabamos de mostrar en la tabla de arriba.

$FP_1 = +2pq - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = 5pq - 2p - 2q + 1$

$FP_2 = -1pq + 1p(1-q) + 1(1-p)q - 1(1-p)(1-q) = -4pq + 2p + 2q - 1$

Ahora derivamos FP_1 con respecto a p y FP_2 con respecto a q, igualamos a cero y resolvemos:

$dFP_1/dp = 5q - 2 = 0$

$dFP_2/dq = -4p + 2 = 0$

De donde obtenemos $p = 1/2$ y $q = 2/5$, y lógicamente $1-p = 1/2$ y $1-q = 3/5$.

Como es lógico: $p = p_1$(cara), $1-p = p_1$(cruz), $q = p_2$(cara) y $1-q = p_2$(cruz).

Tiene que deshacer los paréntesis, eso es todo:

$Fp1 = 2pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = 2pq - p + pq + 1 - p - q + pq$

El equilibrio en estrategias mixtas queda definido por las probabilidades o proporciones con las que cada jugador emplea sus estrategias (p y q).

El resultado o los pagos asociados a ese equilibrio pueden calcularse empleando la función de pagos.

- El problema es que yo se hacer el desarrollo con la fórmula de igualar los valores esperados (con la función de pagos me resulta más dificil), y en este ejercicio obtengo como resultados:
- p2 (cruz)= 3/5
- p2 (cara) = 2/5
- p1 (cruz)= 1/2
- p1 (cara)= 1/2
- Cuando obtengo los resultados no sé cómo interpretarlos. ¿Cuál sería el equilibrio en estrategias mixtas?

El jugador 1 pide cara el 50% de las veces, y el jugador 2 pude cara el 40% de las veces. Esa es una forma de decirlo. Otra es hacerlo como lo ha hecho usted: poniendo todas las probabilidades (es reiterativo porque dos a dos suman 1). Ese es el equilibrio en estrategias mixtas.

2. **Suponga que en Oportunidad de mercado sólo la empresa 1 es consciente del hecho de que se ha producido una oportunidad de mercado. ¿Qué equilibrio procedería en este caso? ¿Debería la empresa 2 entrar en el mercado si la empresa 1 ya lo ha hecho?**

Nos referimos a la pregunta 3.2 de la página 80, "Oportunidad de mercado":

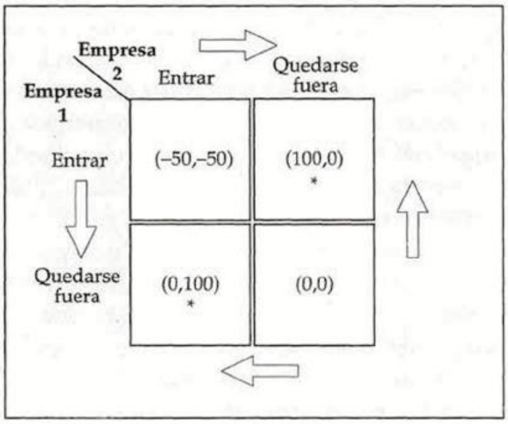
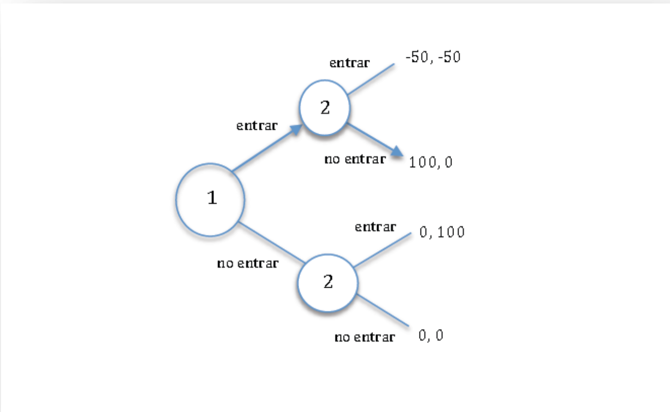


Figura 3.2. Oportunidad de mercado.

Deberíamos transformar este juego en otro secuencial, en el que la empresa 1 mueve primero. Obviamente a la empresa 1 le interesa entrar, y a la empresa 2 quedarse fuera. La secuencialidad ayuda a predecir un resultado para el juego, que coincide además con uno de los equilibrios de Nash. En el mundo real suele pasar esto: la empresa que se da cuenta de una oportunidad de mercado antes suele aprovecharla, y eso explica la posición en el mercado de cada empresa.



3. Suponga que en el Póquer del mentiroso el jugador 1 gana \$0,60 si el jugador 2 se lo cree. El resto de las ganancias no cambian. ¿Cómo afecta esto a la solución? ¿Mentirá el jugador 1 más a menudo o menos a menudo con este cambio de reglas?

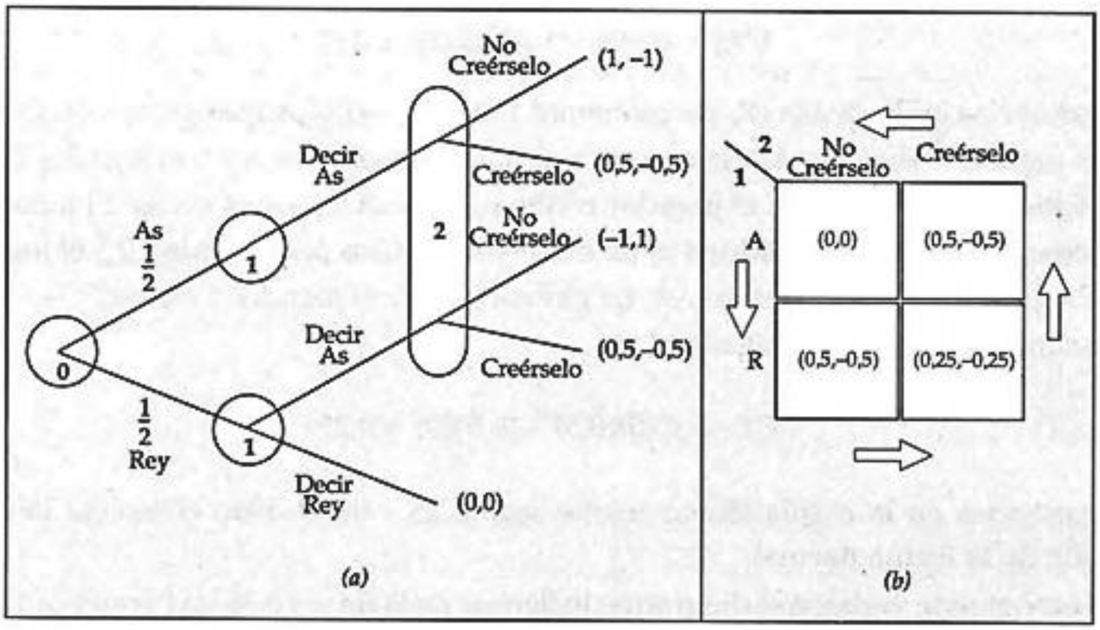


Figura 3.3. Póquer del mentiroso: ***(a)*** **forma extensiva;** ***(b)*** **forma normal.**

Hay que repensar el juego del póker del mentiroso, pero con un cambio en las ganancias. El jugador 1 pasa a ganar \$0,60 si el jugador 2 se lo cree, en vez de 0,5. Nos vamos a la forma normal, con los resultados alterados:

			Jugador 2
		No Creérselo	Creérselo
	A	(0, 0)	(0,6, -0,6)
Jugador 1	R	(0,5, -0,5)	(0,3, -0,3)

Podemos construir flechas, como hace el libro, o subrayar resultados. Los dos procedimientos son equivalentes. No hay estrategias dominantes, y tampoco equilibrios de Nash en estrategias puras. Vamos a buscar un posible equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Una vez más, hay dos procedimientos. Seguimos primero el que usa el libro

(igualar valores esperados de las dos estrategias que tiene un jugador). Primero, jugador 1:

$$0p_2(\text{no creer}) + (0{,}6)p_2(\text{creer}) = (0{,}5)p_2(\text{no creer}) + 0{,}3p_2(\text{creer}).$$

Recordamos que: $p_2(\text{no creer}) + p_2(\text{creer}) = 1$, y formamos un sistema con dos ecuaciones para obtener $p_2(\text{no creer}) = 3/8$, $p_2(\text{creer}) = 5/8$.

El jugador 2:

$$0p_1(A) + (-0,5)p_1(K) = (-0,6)p_1(A) + (-0,3)p_1(K)$$

Recordamos que $p_1(A) + p_1(K) = 1$ y formamos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, del que obtenemos $p_1(A) = 1/4$, $p_1(K) = 3/4$.

Con funciones de pago:

$FP_1 = 0pq + 0,6p(1\text{-}q) + 0,5(1\text{-}p)q + 0,3(1\text{-}p)(1\text{-}q) = 0,3p - 0,8pq + 0,2q + 0,3$

$FP_2 = 0pq - 0,6p(1\text{-}q) - 0,5(1\text{-}p)q - 0,3(1\text{-}p)(1\text{-}q) = - 0,3p + 0,8pq - 0,2q - 0,3$

$dFP_1/dp = 0,3 - 0,8q = 0$, de donde $q = 3/8$ y $(1\text{-}q) = 5/8$

$dFP_2/dq = - 0,2 + 0,8p = 0$, de donde $p = 1/4$ y $(1\text{-}q) = 3/4$

Obviamente $p = p_1(A)$, $(1\text{-}p) = p_1(K)$, $q = p_2(\text{no creer})$ y $(1\text{-}q) = p_2(\text{creer})$.

Con este equilibrio de Nash en estrategias mixtas, el jugador 1 puede esperar ganar 0,375, mientras que el jugador 2 puede esperar perder 0,375.

El jugador 1 miente un poco menos que antes ($1/4 < 1/3$), y gana algo más ($0,375 > 0,33$). El cambio ha hecho que las condiciones sean algo más favorables para jugador 1.

4. En una variante de Coordinación de sistemas de vídeo, suponga que importa si los jugadores se coordinan en Beta o en VHS en el sentido de que coordinarse en Beta proporciona una ganancia de 2, mientras que coordinarse en VHS proporciona una ganancia de 1. Hallar los tres equilibrios de este juego (dos puros, uno mixto), y a continuación hallar la solución utilizando dominancia en ganancias y simetría.

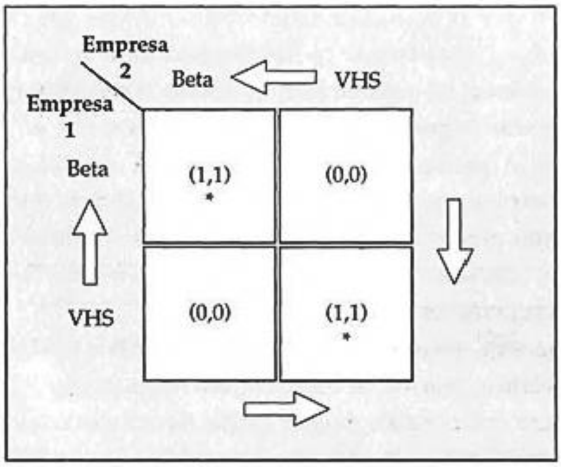


Figura 2.10. Coordinación de sistemas de vídeo.

Lo modificamos tal y como pide el problema:

			Empresa 2
		Beta	VHS
	Beta	(2, 2)	(0, 0)
Empresa 1	VHS	(0, 0)	(1, 1)

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son Beta/Beta y VHS/VHS. Ambos son simétricos.

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas se puede obtener por dos procedimientos, pero vamos a seguir aquí el del libro (igualar los valores esperados de las dos estrategias para cada jugador). Jugador 1:

$2\ p_2(\text{Beta}) + 0\ p_2(\text{VHS}) = 0\ p_2(\text{Beta}) + 1\ p_2(\text{VHS})$

Además sabemos que

$p_2(\text{Beta}) + p_2(\text{VHS}) = 1$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y recordando que el juego es simétrico, podemos obtener:

$p_1(\text{Beta}) = p_2(\text{Beta}) = 1/3$, $p_1(\text{VHS}) = p_2(\text{VHS}) = 2/3$.

Que es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico.

Lo extraño de este resultado en estrategias mixtas es que, a pesar de que hemos aumentado el premio de coordinar los sistemas Beta, las empresas reducen la probabilidad de usar Beta. Podemos calcular la eficiencia de cada equilibrio, y obtendremos una ordenación en la que el más eficiente es coordinarse en Beta (estrategias puras), después coordinarse en VHS (estrategias puras) y por último alternar o mezclar los sistemas (estrategias mixtas).

5. Haga Oportunidad de mercado (figura 3.4) asimétrico en el siguiente sentido. La oportunidad de mercado tiene un valor de 90 para la empresa 2. Nada más cambia en el juego. Hallar los tres equilibrios (dos puros, uno mixto) de este juego.

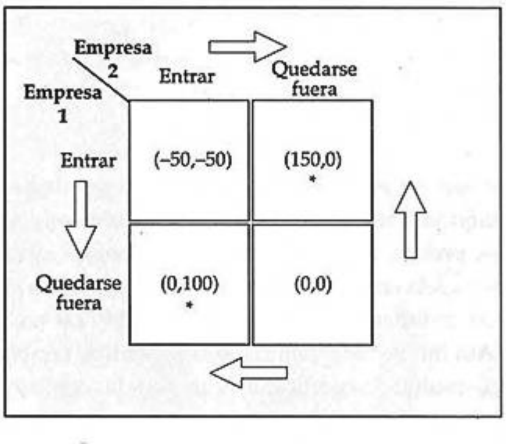


Figura 3.4. Oportunidad de mercado asimétrico.

Lo modificamos tal y como pide el problema:

			Empresa 2
		Entrar	Quedarse fuera
	Entrar	(-50, -50)	(150, 0)
Empresa 1	Quedarse fuera	(0, 90)	(0, 0)

Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras, que son Quedarse fuera/Entrar y Entrar/Quedarse fuera. Podemos calcular también un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Para la empresa 1:

$$(-50)p_2(\text{entrar}) + (150)p_2(\text{quedarse fuera}) = 0$$

Además:

$$p_2(\text{entrar}) + p_2(\text{quedarse fuera}) = 1$$

Resolviendo ese sencillo sistema obtendremos: $p_2(\text{entrar}) = 3/4$, $p_2(\text{quedarse fuera}) = 1/4$.

Empresa 2:

$$(-50)p_1(\text{entrar}) + (90)p_1(\text{quedarse fuera}) = 0$$

Además:

$$p_1(\text{entrar}) + p_1(\text{quedarse fuera}) = 1$$

Resolviendo el sistema obtenemos $p_1(\text{entrar}) = 9/14$, $p_1(\text{quedarse fuera}) = 5/14$.

A pesar de la modificación en el valor que hemos introducido, reduciendo la ganancia del jugador 2 cuando entra y el jugador 1 se queda fuera, la probabilidad de entrar del jugador 2 sigue igual, pues esta se obtiene de la expresión $(-50)p_2(\text{entrar}) + (150)p_2(\text{quedarse fuera}) = 0$, que no se ve afectada.

6. Ofrezca tres ejemplos de faroles en el mundo de los negocios. En cada ejemplo, ¿qué pasa con el jugador que hace el farol si se le descubre?

Hay casi infinitos ejemplos de faroles (*bluffing* en inglés) en el mundo real.

1) Una empresa de software que publicita "vaporware" (un programa que realmente no existe, hasta que la empresa consiga el contrato para desarrollarlo, como pasó con Microsoft y el MS-DOS, siendo el contratista IBM).

2) Apostar en una subasta sin tener el dinero para respaldar la apuesta, y así hacer que el precio suba o simplemente dar a entender que se dispone de recursos que uno no tiene.

3) Demandar a alguien cuando no tiene uno razón o forma de demostrarlo, con la esperanza de asustar al demandado y conseguir algo mediante una negociación.

7. **Considere un ejemplo que aparece en la economía de los recursos escasos. Hay dos lugares de pesca, uno bueno y otro malo. El lugar bueno tiene 20 peces, mientras que el malo sólo tiene 12. Hay dos pescadores, 1 y 2. Un pescador puede ir a cualquiera de los dos lugares, pero sólo a uno. Si dos pescadores van al mismo lugar, se dividen la pesca equitativamente. Halle tres equilibrios en este juego.**

Organizamos la presentación del juego en forma normal:

			Pescador 2
		Bueno	Malo
	Bueno	(10, 10)	(20, 12)
Pescador 1	Malo	(12, 20)	(6, 6)

Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (bueno, malo) y (malo, bueno). También hay un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico en ganancias, en el que cada pescador va al lugar bueno de pesca con una probabilidad de 7/8. Pero los beneficios para cada jugador con la estrategia mixta son de 11,25, inferiores a los que se conseguiría con cualquiera de los equilibrios en estrategias puras.

Los cálculos de este juego se dejan para el alumno.

Valor esperado 1: (7/8)(7/8) 10 + (7/8)(1/8)20 + (1/8)(7/8)12 + (1/8)(1/8)6 = 11,25

Dado que el juego es simétrico es lo mismo para el otro jugador...

Hay **dos formas de encontrar la solución**.

1.- **Igualar los valores esperados** de las dos estrategias para un mismo jugador:

VE1(bueno) = VE1(malo)

VE2(bueno) = VE2(malo)

2**.- Usando las funciones de pagos**.

Vamos a usar **la primera forma, para el primer jugador**:

VE1(bueno) = VE1(malo)

VE1(bueno) = 10p2(bueno) + 20p2(malo)

donde p2(bueno) es la probabilidad de que el jugador 2 elija bueno; y lo mismo para p2(malo).

VE1(malo) = 12p2(bueno) + 6p2(malo)

Esto indica que los resultados de **las elecciones que haga el jugador 1 dependen de lo que haga el otro jugador.**

Por tanto:

10p2(bueno) + 20p2(malo) = 12p2(bueno) + 6p2(malo)

14p2(malo) = 2p2(bueno)

Además sabemos que p2(malo) + p2(bueno) = 1.

Sustituimos p2(malo) = 1 - p2(bueno)

14[1 - p2(bueno)] = 2p2(bueno)

14 - 14p2(bueno) = 2p2(bueno)

14 = 16p2(bueno)

p2(bueno) = 14/16 = 7/8

El juego es simétrico, así que sabemos que p1(bueno) = 7/8. Pero puede calcularlo.

Ahora tenemos que calcular el resultado material (esperado, o medio) para cada jugador.

Eso es el valor esperado del juego para cada uno de los dos jugadores.

Se hace mediante la función de pagos, usando las probabilidades calculadas.

FP1 = VE(jugador 1) = (7/8)(7/8) 10 + (7/8)(1/8)20 + (1/8)(7/8)12 + (1/8)(1/8)6 = 11,25

El jugador 1 obtendría 10 si el juego acaba en la casilla superior izquierda. ¿Cuál es la probabilidad de caer ahí?

La respuesta es: la probabilidad de que el jugador 1 elija "bueno" por la probabilidad de que el jugador 2 elija "bueno".

Cuando dos sucesos son *independientes*, la probabilidad de que ocurran los dos es el producto de sus probabilidades.

Si tira un dado de 6 caras la probabilidad de sacar un 1 es de 1/6. Si tira dos dados, la probabilidad de sacar dos 1 es de (1/6)*(1/6) = 1/36.

Aquí se aplica el mismo principio.

R.

8. **En juegos de pesca como el del problema 7, a menudo aparecen conflictos sobre los territorios de pesca. ¿Cómo podría un equilibrio asimétrico, como el resultante del límite de las 200 millas entre naciones, conducir a un resultado eficiente?**

El límite de 200 millas es una forma de asignar derechos de pesca, y esa norma podría conducir a mayores beneficios que una estrategia mixta. El problema es que uno de los dos pescadores podría estar mucho mejor que el otro, si el caladero cae mayoritariamente dentro del límite que garantiza exclusividad de explotación a uno de los pescadores. En el capítulo 4 se estudia lo que se conoce como "tragedia de los ejidos", que está relacionado con este tema de la limitación de la explotación de recursos que estaban abiertos a todos.

9. **Halle el equilibrio en estrategias mixtas de Precios bajos cada día, cuando hay 90 compradores-d en el mercado en lugar de 100. ¿Qué intuición hay detrás de este resultado?**

Se refiere a esta figura:

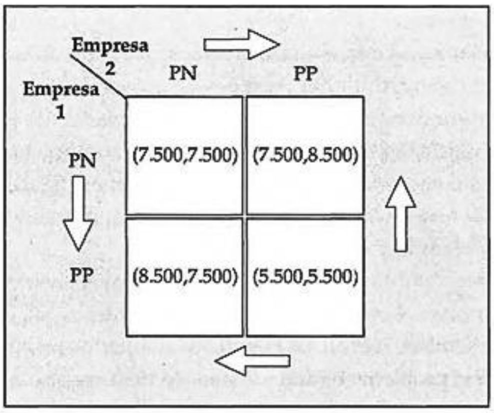


Figura 3.5. Precios bajos cada día.

Pero hay que alterar los pagos o resultados:

			Empresa 2
		PN	PP
	PN	(6750, 6750)	(6750, 8250)
Empresa 1	PP	(8250, 6750)	(5250, 5250)

El beneficio marginal es de $150 por unidad vendida y hay 90 compradores *d* que se reparten al 50% entre las dos empresas. Por ello, cuando el precio es normal por parte de ambas, cada una venderá 45 unidades a 45 compradores *d*. Por tanto, 45*$150 = $6750.

Vamos a ver más casillas. Ahora hay 90 compradores desinformados en vez de 100. Por tanto, 45 para cada jugador, en vez de 50. El procedimiento de cálculo de los datos de la matriz es exactamente el mismo que el de la Figura 3.5, con ese cambio. Por ejemplo, cuando la Empresa 1 elige PN y la Empresa 2 PP tenemos lo siguiente: La empresa 1 tiene sus 45 clientes desinformados, con su beneficio marginal de 150, que supone unos ingresos de 45*150 = 6750; pero la empresa 2 tiene esos mismos compradores desinformados, más todos los informados -que buscan rebajas-, lo que supone 45 desinformados y 120 informados (165), y dado que beneficio marginal con rebajas es de 50, unos ingresos de 165*50 = 8250. Esos son los dos valores de esa casilla, simétricos a los de la casilla en que la Empresa 2 elige PN y la 1 PP (se invierten los papeles).

Si las dos ofrecen rebajas, cada una tendrá a la mitad de los informados y de los desinformados (45 + 60 = 105 clientes cada una), y con un beneficio marginal de 50 cada una, por lo que los ingresos serán 105*50 = 5250 en la casilla (PP, PP).

Buscamos ahora la combinación de estrategias que nos llevan a un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Para la empresa 1:

$$6750 = (8250)p_2(PN) + (5250)p_2(PP)$$

Además:

$$p_2(PN) + p_2(PP) = 1$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas obtenemos $p_2(PN) = 1/2 = p_2(SP)$. Las probabilidades para la estrategia de la empresa 1, dada la simetría del juego, son las mismas: $p_1(PN) = 1/2 = p_1(SP)$.

Cada empresa ofrecerá una rebaja con mayor probabilidad (1/2 vs. 1/3) que cuando había 100 compradores tipo *d*, que eran los desinformados. Cuantos más compradores informados (o buscadores de rebajas) hay relativos a los desinformados (o insensibles al precio) más atractivas son las rebajas para las empresas. Sólo mediante las rebajas se pueden atraer a los compradores informados.

10. En Precios bajos cada día, suponga que hay sólo 20 compradores-i en el mercado en lugar de 120. ¿Cómo afecta esto a la solución? ¿Puede ser que haya ocasiones en que las empresas nunca quieran lanzar promociones?

p y q son probabilidades, y por tanto su valor se encuentra entre 0 y 1.

Paso a paso:

		Empresa 2	
		PN	PP
Empresa 1	PN	(7500, 7500)	(7500, 3500)
	PP	(3500, 7500)	(3000, 3000)

$FP_1 = 7500pq + 7500p(1-q) + 3500(1-p)q + 3000(1-p)(1-q) =$

$= 7500pq + 7500p - 7500pq + 3500q - 3500pq + 3000 - 3000q - 3000p + 3000pq =$

$= - 500pq + 500q + 4500p + 3000$

$$dFP1/dp = -500q + 4500 = 0;$$

de donde q = 4500/500 = **9**

$FP_2 = 7500pq + 3500p(1\text{-}q) + 7500(1\text{-}p)q + 3000(1\text{-}p)(1\text{-}q) =$

$= 7500pq + 3500p - 3500pq + 7500q - 7500pq + 3000 - 3000q - 3000p + 3000pq =$

$= - 500pq + 500p + 4500q + 3000$

$$dFP2/dq = -500p + 4500 = 0;$$

de donde p = 4500/500 = **9**

No es extraño que coincidan p y q pues el juego es simétrico.

C11 es el valor para el jugador columna de la casilla 11, que es la casilla primera fila-primera columna. C12 es el valor a la derecha de la coma para la primera fila, segunda columna. C21, segunda fila-primera columna, etc.

Por tanto:

C11 = 7500

C12 = 3500

C21 = 7500

C22 = 3000

La función de pagos del jugador columna es:

$$\mathbf{FP_c = C_{11}pq + C_{12}p(1\text{-}q) + C_{21}(1\text{-}p)q + C_{22}(1\text{-}p)(1\text{-}q)}$$

y por tanto

$$FP_c = 7500pq + 3500p(1\text{-}q) + 7500(1\text{-}p)q + 3000(1\text{-}p)(1\text{-}q)$$

El procedimiento que consiste en igualar los valores esperados es -al menos para mi- más sencillo de operar pero más peligroso de plantear, porque para las estrategias del jugador fila hay que: 1, tomar los valores a la izquierda de la coma; 2, hacerlo por filas. Pero para el jugador columna hay que: 1, tomar los valores a la derecha de la coma; y 2, hacerlo por columnas.

Aunque sea más largo, una buena idea es resolver siempre por los dos métodos y asegurarse así de que el resultado que obtenemos es correcto (debe dar lo mismo por una vía y por otra.

Repetimos el juego anterior, pero ahora son los jugadores informados (jugadores i) los que cambian, y pasan de 120 a solo 20.

			Empresa 2
		PN	PP
	PN	(7500, 7500)	(7500, 3500)
Empresa 1	PP	(3500, 7500)	(3000, 3000)

Sólo hay un equilibrio de Nash en estrategias puras, que además es producto del cruce de dos estrategias dominantes. Por tanto, es un resultado necesario, y estable. Dicho equilibrio es mantener el precio normal por parte de ambas empresas, todo el tiempo. El número de compradores informados es tan bajo que a ninguna de las empresas le interesa lanzar rebajas.

Todos los casos que se ven en el libro llevan a un equilibrio en estrategias mixtas, pero no siempre es así. Cuando hay estrategias estrictamente dominantes no cabe un equilibrio en estrategias mixtas. Vamos a ver por qué en este caso. Calculamos las funciones de pagos o resultados para cada jugador. Para el primero:

$FP_1 = -500\,pq + 4500\,p + 500\,q + 3000$

Si la resolvemos derivando e igualando a cero obtendremos p = 9, que es un resultado absurdo, pues p está comprendido entre 0 y 1. Vamos a ver qué está pasando. Aislamos p de la función de pagos:

$FP_1 = p(4500 - 500q) + 500\,q + 3000$

El jugador 1 maximiza FP_1 aumentando todo lo posible p (p = 1) siempre y cuando $q < 4500/500$, es decir, siempre y cuando $q < 9$. Dado que q siempre es menor que 9, el jugador 1 siempre hará p = 1. La representación gráfica de esta circunstancia es la *función de reacción*, que se representa en unos ejes con q (vertical) y p (horizontal) y es la función que le dice al jugador 1 cómo tiene que responder, con p, a cada posible acción del jugador 2 (con q). Este caso la función de reacción del jugador 1 sería una línea recta vertical allí donde p = 1 y que llega hasta una altura de q = 1. Es decir, p = 1 para cualquier valor de q (razonable).

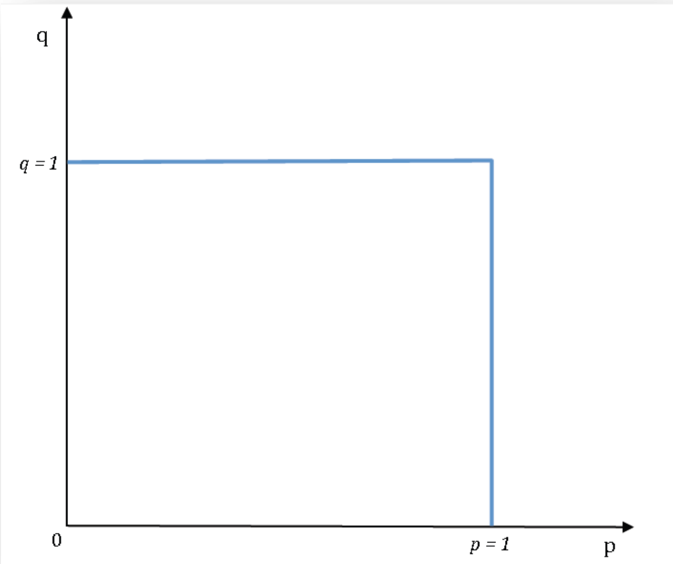
Vamos a la función de pagos del otro jugador:

$FP_2 = -500pq + 500p + 4500q + 3000$

Aislamos todo lo posible q para ver fácilmente cómo reacciona FP_2 cuando tocamos q:

$FP_2 = q(4500 - 500p) + 500p + 3000$

Como ve, el jugador 2 hará q = 1 siempre que $p < 4500/500$, es decir, $p < 9$. Pero es que p siempre será menor que 1. Eso quiere decir que q = 1 siempre. La *función de reacción* para el jugador 2 es una recta horizontal a la altura de q = 1. Vamos a ver estas funciones de reacción:



El equilibrio se produce allí donde ambas funciones de reacción se cruzan, o se tocan. Eso sólo ocurre donde p = 1 y q = 1. ¿Cómo se interpreta? Obviamente, el jugador 1 y el jugador 2 juegan sus estrategias PN y no hay estrategia mixta posible. ¿Por qué? Porque PN es una estrategia estrictamente dominante para ambos jugadores. En ese caso no hay equilibrio en estrategias mixtas alternativo.

Apéndice

Faroles en el póquer de una carta:

- En esta versión del póquer se producen muchos faroles
- La baraja: ases, A, Reyes, K, y Reinas, Q→ cada tipo de carta sale con frecuencia 1/3
- El juego comienza con una apuesta inicial, a
- A cada jugador se le reparte una carta boca abajo
- Cada jugador ve su carta, no la de los oponentes, pudiendo apostar una cantidad b o pasar →decisión tomada simultaneamente.
- Valor A> Valor K> Valor Q
- Resto de reglas igual que antes

- Hay nueve manos posibles y cada una tiene igual probabilidad: 1/9
- Cada mano consta de un par (mano del j1, mano del j2)=(A, R) si a j1 le toca un As y a J2 un rey…
- Como un jugador ve su carta, tres posibilidades, y puede apostar o pasar, dos posibilidades, el número de estrategias disponibles para el jugador serán: 2^3=8:

I: Apostar con un as, apostar con un rey, apostar con una reina
II: Apostar con un as, apostar con un rey, pasar con una reina
III: Apostar con un as, pasar con un rey, apostar con una reina
IV: Apostar con un as, pasar con un rey, pasar con una reina
V: Pasar con un as, apostar con un rey, apostar con una reina
VI: Pasar con un as, apostar con un rey, pasar con una reina
VII: Pasar con un as, pasar con un rey, apostar con una reina
VIII: Pasar con un as, pasar con un rey, pasar con una reina

Con Estrategia I se apuesta siempre→muy agresiva, para defender la apuesta inicial

Con Estrategias I, III, V y VIII, se apuesta siempre con una reina→ todas tienen un farol pues con una reina nunca se puede ganar.

Con E IV solo se apuesta cuando el jugador no puede perder→ muy conservadora. Cuando se observa que se utiliza es porque tiene un as

La E VIII es el no va más de la timidez; nunca apuesta

La E VII es perversa→solo apuesta con una carta que no puede ganar, una reina. Es una apuesta desinformativa igual que la IV, pero indica a un jugador que su oponente no le puede ganar (cuando los jugadores lo hacen simultáneamente)

Las estrategias V, VI, VII y VIII son malas; están dominadas por la estrategia que apuesta con un as.

Centraremos la atención en la I, II, III y IV, que pasan con un as. A continuación el juego es simétrico: ambos jugadores tienen las mismas estrategias y en promedio reciben cartas del mismo valor→ la solución que calculemos para j1 valdrá para j2. Después y por la simetría, si una estrategia juega contra sí misma, ni gana, ni pierde. Y, también por la simetría y porque el póquer es un juego de suma cero, la ganancia de la estrategia I al enfrentarse a la II cuando j1 utiliza I es igual a menos la ganancia que recibe II al enfrentarse a I cuando j1 utiliza la estrategia II. →solo habrá que hacer los cálculos para seis pares de estrategias (I contra II, I-III, I-IV, II-III, II-IV y III-IV); cuyos resultados son:

Jugador 1 \ Jugador 2	I	II	III	IV
I	(0,0)	$\left(\frac{a-2b}{9},\frac{2b-a}{9}\right)$	$\left(\frac{3a}{9},\frac{-3a}{9}\right)$	$\left(\frac{4a-2b}{9},\frac{2b-4a}{9}\right)$
II	$\left(\frac{2b-a}{9},\frac{a-2b}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{b}{9},\frac{-b}{9}\right)$	$\left(\frac{a-b}{9},\frac{b-a}{9}\right)$
III	$\left(\frac{-3a}{9},\frac{3a}{9}\right)$	$\left(\frac{-b}{9},\frac{b}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{2a-b}{9},\frac{b-2a}{9}\right)$
IV	$\left(\frac{2b-4a}{9},\frac{4a-2b}{9}\right)$	$\left(\frac{b-a}{9},\frac{a-b}{9}\right)$	$\left(\frac{b-2a}{9},\frac{2a-b}{9}\right)$	(0,0)

Figura 3.6. Póquer de una carta. Matriz de ganancias, jugador 1.

Por ejemplo, la casilla I contra II: Con la estrategia I se apuesta siempre y con la II se apuesta siempre, menos con una reina →Lo que le ocurre a j1, que está utilizando I, en cada una de las nueve posibles manos cuando se enfrenta a un oponente que utiliza la estrategia II:

(A, A) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, empatan; pago = 0
(A, R) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, 1 gana; pago = $a + b$
(A, Q) : 1 apuesta, 2 pasa, 1 gana; pago = a
(R, A) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, 2 gana; pago = $-a - b$
(R, R) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, empatan; pago = 0
(R, Q) : 1 apuesta, 2 pasa, 1 gana; pago = a
(Q, A) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, 2 gana; pago = $-a - b$
(Q, R) : Ambos apuestan, se descubren las cartas, 2 gana; pago = $-a - b$
(Q, Q) : 1 apuesta, 2 pasa, 1 gana; pago = a

Sumando estos nueve resultados y multiplicando la probabilidad por 1/9 obtenemos (a-2b)/9, resultado para j1 en la casilla (I, II)→ menos este número, (-a+2b)/9 es el resultado para j1 en la casilla (II, I).

Solo hay dos casos inequívocos, I contra III y II contra III en que una estrategia gana a otra, cualquiera que sea la apuesta inicial y la siguiente; en el primero se gana 3a/9 y en el segundo b/9. Cualquier otro emparejamiento puede producir cualquier resultado dependiendo de la importancia relativa de la apuesta inicial a con respecto a la siguiente b→ esto condiciona la solución.

Fijemos la apuesta inicial a=1$ y dejemos variable la siguiente b. Si b=2$, sustituyendo en la figura 3.6 obtenemos la figura 3.7:

Jugador 1 \ Jugador 2	I	II	III	IV
I	(0,0)	$\left(\frac{-3}{9}, \frac{3}{9}\right)$	$\left(\frac{3a}{9}, \frac{-3a}{9}\right)$	(0,0)
II	$\left(\frac{3}{9}, \frac{-3}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{2}{9}, \frac{-2}{9}\right)$	$\left(\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}\right)$
III	$\left(\frac{-3a}{9}, \frac{3a}{9}\right)$	$\left(\frac{-2}{9}, \frac{2}{9}\right)$	(0,0)	(0,0)
IV	(0,0)	$\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}\right)$	(0,0)	(0,0) *

Figura 3.7. Póquer de una carta. Matriz de ganancias, jugador 1, $a = \$1, b = \$2$.

Hay un equilibrio en estrategias puras en (IV, IV), el único equilibrio→ la solución al póquer de una carta (con reinas) cuando la apuesta inicial es 1$ y la siguiente apuesta es 2$ es apostar solo con un as.

La siguiente apuesta es muy grande respecto a la apuesta inicial para arriesgarse a perderla con manos que pueden ser derrotadas.

Ambos jugadores se quedan sin ganar ni perder con esta solución, lo que cabía esperar debido a la simetría.

Si la siguiente apuesta fuera igual a la inicial, 1$, la matriz de ganancias sería la figura 3.8

Jugador 1 \ Jugador 2	I	II	III	IV
I	(0,0)	$\left(\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}\right)$	$\left(\frac{3a}{9}, \frac{-3a}{9}\right)$	$\left(\frac{2}{9}, \frac{-2}{9}\right)$
II	$\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}\right)$	(0,0) *	$\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}\right)$	(0,0)
III	$\left(\frac{-3a}{9}, \frac{3a}{9}\right)$	$\left(\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}\right)$
IV	$\left(\frac{-2}{9}, \frac{2}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}\right)$	(0,0)

Figura 3.8. Póquer de una carta. Matriz de ganancias, jugador 1, $a = b = \$1$.

Donde el único equilibrio en estrategias puras se da en (II,II). Ambos jugadores apuestan con un as o un rey, pero pasan con una reina → no hay faroles y ambos se quedan sin ganar ni perder.

En algún punto entre una apuesta b de 1$ y una de 2$, la solución del juego salta de la estrategia II a la IV y es en esta zona donde aparecen los equilibrios en estrategias mixtas y faroles.

Si fijamos la apuesta b=1,5$, figura 3.9, ni II ni IV son un equilibrio. No hay equilibrio en estrategias puras y el valor está en la zona mencionada antes:

Jugador 1 \ Jugador 2	I	II	III	IV
I	(0,0)	$\left(\frac{-2}{9}, \frac{2}{9}\right)$	$\left(\frac{3a}{9}, \frac{-3a}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{9}, \frac{-1}{9}\right)$
II	$\left(\frac{2}{9}, \frac{-2}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{1{,}5}{9}, \frac{-1{,}5}{9}\right)$	$\left(\frac{-0{,}5}{9}, \frac{0{,}5}{9}\right)$
III	$\left(\frac{-3a}{9}, \frac{3a}{9}\right)$	$\left(\frac{-1{,}5}{9}, \frac{1{,}5}{9}\right)$	(0,0)	$\left(\frac{0{,}5}{9}, \frac{-0{,}5}{9}\right)$
IV	$\left(\frac{-1}{9}, \frac{1}{9}\right)$	$\left(\frac{0{,}5}{9}, \frac{-0{,}5}{9}\right)$	$\left(\frac{-0{,}5}{9}, \frac{0{,}5}{9}\right)$	(0,0)

Figura 3.9. Póquer de una carta. Matriz de ganancias, jugador 1, $a = \$1$, $b = \$1{,}50$.

Ahora debemos buscar una solución en estrategias mixtas para el póquer.

Como las estrategias no dominadas son I, II, III y IV, podría pensarse que hay un equilibrio en estrategias mixtas consistente en esas cuatro.

Sean p(I), p(II), p(III) y p(IV) respectivamente las probabilidades de esas cuatro estrategias puras en una estrategia mixta → es necesario que todas ellas obtengan la misma ganancia:

$$
\begin{aligned}
VE(\mathrm{I}) &= 0p(\mathrm{I}) - \frac{2}{9}p(\mathrm{II}) + \frac{2a}{9}p(\mathrm{III}) + \frac{1}{9}p(\mathrm{IV}) \\
&= VE(\mathrm{II}) = \frac{2}{9}p(\mathrm{I}) + 0p(\mathrm{II}) + \frac{1}{6}p(\mathrm{III}) - \frac{1}{18}p(\mathrm{IV}) \\
&= VE(\mathrm{III}) = -\frac{-3}{9}p(\mathrm{I}) - \frac{1}{6}p(\mathrm{II}) + 0p(\mathrm{III}) + \frac{1}{18}p(\mathrm{IV}) \\
&= VE(\mathrm{IV}) = -\frac{1}{9}p(\mathrm{I}) + \frac{1}{18}p(\mathrm{II}) - \frac{1}{18}p(\mathrm{III}) + 0p(\mathrm{IV})
\end{aligned}
$$

Necesitamos también que las probabilidades sumen 1:

p(I)+ p(II)+ p(III) + p(IV)=1

Este sistema de ecuaciones no tiene solución pues conduce a una contradicción → no hay solución en estrategias mixtas que contenga las cuatro estrategias.

La estrategia más sospechosa es III: con ella se apuesta con ases y reinas(aunque con reinas no se puede ganar), mientras que se pasa con reyes(aunque estos en promedio pueden ganar tantas veces como perder). Además esta estrategia es la que tiene los números más negativos de la figura 3.8. Por tanto la excluimos haciendo que p(III)=0
Buscaremos una estrategia mixta que contenga sólo I, II y IV → resolver el sistema:

$$
\begin{aligned}
VE(\mathrm{I}) &= 0p(\mathrm{I}) - \frac{2}{9}p(\mathrm{II}) + \frac{3}{9}(0) + \frac{1}{9}p(\mathrm{IV}) \\
&= VE(\mathrm{II}) = \left(\frac{2}{9}\right)p(\mathrm{I}) + 0p(\mathrm{II}) + \frac{1}{6}(0) - \frac{1}{18}p(\mathrm{IV}) \\
&= VE(\mathrm{IV}) = -\frac{1}{9}p(\mathrm{I}) + \frac{1}{18}p(\mathrm{II}) - \frac{1}{18}(0) + 0p(\mathrm{IV})
\end{aligned}
$$

También necesitamos que las probabilidades sumen 1:

p(I)+ p(II)+ 0 + p(IV)=1

Este sistema de ecuaciones tiene solución:

$$p(\mathrm{I})^* = \frac{1}{7} \qquad p(\mathrm{II})^* = \frac{2}{7} \qquad p(\mathrm{IV})^* = \frac{4}{7}$$

Este equilibrio en estrategias mixtas es la única solución del sistema de ecuaciones lineales y por tanto debe ser la solución al póquer de una carta (con reinas).

De acuerdo con esta estrategia se produce una gran cantidad de faroles.

Analizamos esta estrategia mixta sobre la base de 21 manos. En siete de ellas el jugador apuesta siempre as→ como con las estrategias I, II y IV con un as se apuesta, en estas siete se apuesta as.

En otras siete a un jugador se le reparte un rey→ según I y II con un rey se apuesta; lo que ocurre 3 de cada siete veces (1/7 + 2/7), mientras que según III, con un rey se pasa, lo que ocurre 4 de 7 veces→estrategia engañosa; a veces el jugador apuesta rey y a veces no.

En otras siete al jugador se le reparte una reina→ según I con la reina se apuesta, 1/7 veces, mientras que con II y III, con la reina se pasa, 6/7 veces

En 21 manos el jugador se marca faroles en su forma más pura, una vez, apostando con una carta, una reina, que no puede ganar, 1/21 veces, es decir un 5% en manos con las que no puede ganar

El secreto de esta estrategia mixta es quitarse al oponente de en medio, evitar que extraiga cualquier información del hecho de que el jugador apueste→ evita que los otros sepan cuáles son tus cartas→ con esta estrategia ni se gana ni se pierde:

VE(I)=VE(II)=VE(IV)=0

Hay que trabajar duro solo para no perder dinero; para ganarlo hay que encontrar además un tonto que no utilice la estrategia adecuada.

Problemas

1. Verifique, en la figura 3.6, la entrada correspondiente a la estrategia I contra la estrategia III.

2. Suponga que la apuesta *b* en el Póquer de una carta es de sólo $0,25 y que la apuesta inicial continúa siendo de $1. ¿Cuál es la solución? ¿Y si la apuesta *b* es de $1,6? ¿Qué dice esto sobre la relación entre la solución al Póquer de una carta y el nivel de la apuesta *b*?